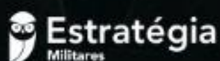


AFA
2024

AULA 00
Introdução à Cinemática

Prof. Toni Burgatto



estrategiamilitares.com.br militares.estrategia.com

Sumário

Siga minhas redes sociais!



@proftoniburgatto

Apresentação do Professor

Para aqueles que não me conhecem, meu nome é Toni Burgatto e sou formado em Engenharia Mecânica-Aeronáutica pelo ITA. Estudei em escola pública no ensino fundamental e médio e somente depois do término do ensino médio comecei a estudar para o ITA.

Ainda quando estava saindo do ensino médio, fiz técnico em eletrônica na minha cidade e lá conheci um pouco mais sobre o que era o ITA e como era o vestibular. Durante minha jornada, comecei a estudar do zero e com livros mais simples, por assuntos básicos, como teorema de Pitágoras. Cada livro e cada conselho de amigos que estavam estudando no ITA foram cruciais para minha aprovação.

Durante minha preparação tive a felicidade de ser aprovado nos principais vestibulares do país: ITA, IME, USP, UFSCAR, UNESP e UNIFEI.

Eu escolhi a carreira militar mesmo antes de entrar no ITA, já no vestibular, e lá, no segundo ano, eu optei novamente pela carreira (no ITA, é possível você mudar de carreira no final do segundo ano, quando existe um processo de recrutamento).

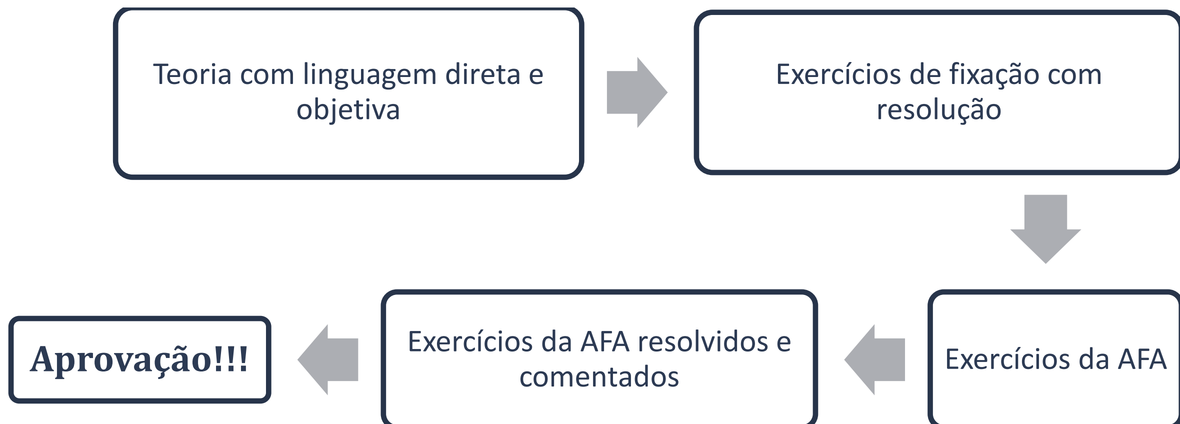
Em 2016 eu me formei e fui designado para trabalhar no Parque de Material Aeronáutico do Galeão (PAMA-GL) no Rio de Janeiro. Eu trabalhava na equipe de projetos do Parque, na seção de Engenharia. Após sete meses, eu decidi sair da carreira, pois vi que não me encaixava no perfil. Desde então dou aula de matemática.

Conte comigo na sua caminhada rumo à AFA. Vamos iniciar nosso curso!

Metodologia Do Curso

Neste curso, iremos apresentar toda base teórica para que você consiga resolver todas as questões de Física da AFA. Ao longo da teoria, resolveremos questões de Física para consolidar a teoria, seguidos de um banco de questões. Resolveremos questões antigas do vestibular da AFA e questões que podem aparecer no seu concurso.

Para isto, seguiremos o seguinte diagrama:



ANÁLISE DOS CONCURSOS ANTERIORES

Segundo o último edital da AFA, temos o seguinte conteúdo programático:

CINEMÁTICA ESCALAR: Movimento Uniforme. Movimento com velocidade escalar variável e Movimento Uniformemente Variado. Movimento Vertical no Vácuo. Gráficos do Movimento Uniforme e do Movimento Uniformemente Variado.

VETORES E GRANDEZAS VETORIAIS: CINEMÁTICA VETORIAL. Vetores. Velocidade e aceleração vetoriais. Movimentos circulares. Lançamento horizontal e lançamento oblíquo no vácuo.

DINÂMICA: Princípios fundamentais. Leis de Newton. Forças de atrito. Forças em trajetória curvilíneas. Trabalho e energia. Impulso e Quantidade de Movimento. Gravitação Universal.

ESTÁTICA: Equilíbrio do ponto material. Equilíbrio dos corpos extensos. Hidrostática.

TERMOLOGIA: Introdução à termologia. Termometria. Dilatação térmica de sólidos e líquidos.

CALOR: Calorimetria. Mudanças de fase. Diagramas de fase. Propagação do calor.

TERMODINÂMICA: Estudo dos gases. As leis da Termodinâmica.

ÓPTICA: Óptica geométrica. Reflexão da luz e Espelhos planos. Espelhos esféricos. Refração luminosa. Lentes esféricas delgadas. Instrumentos ópticos

ONDAS: Movimento harmônico simples (MHS). Ondas. Interferência de ondas. Ondas sonoras.

ELETROSTÁTICA: Eletrização e Força elétrica. Campo elétrico. Trabalho e potencial elétrico. Condutores em equilíbrio eletrostático e Capacitância eletrostática.

ELETRODINÂMICA: Corrente elétrica. Resistores. Medidas elétricas. Geradores e Receptores elétricos. Capacitores.

ELETROMAGNET1SMO: Campo magnético. Força magnética. Indução eletromagnética.

FÍSICA MODERNA: Noções de física quântica: Teoria dos Quanta; Efeito Fotoelétrico; célula fotoelétrica; O Átomo de Bohr; a Natureza "Dual" da Luz; Dualidade Onda-partícula: a Hipótese de Broglie; Princípio da Incerteza de Heisenberg. Relatividade Especial: Relatividade na Física Clássica; Relatividade Galileana; Experiência de Michelson-Morley; Relatividade de Einstein: postulados da Teoria da Relatividade Especial; Modificações na Relatividade Galileana; Contração do comprimento; dilatação do tempo; composição relativística de velocidades; Massa e Energia; Energia e Quantidade de Movimento.

Selecionamos a divisão de questões de Física do vestibular do AFA a partir de 2010, conforme a figura abaixo.

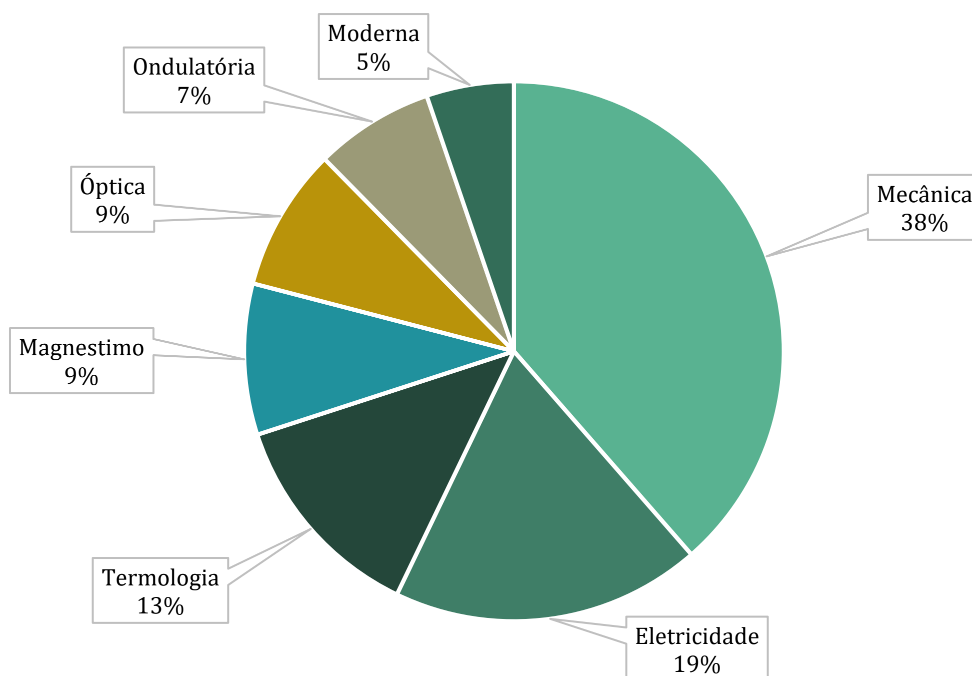


Figura 1: Estatística de questões de física por assuntos na EN a partir de 2010.

Não é nenhuma surpresa que o assunto mais cobrado na prova é Mecânica (as leis de Newton, energia e quantidade de movimento). Esse assunto é um ramo da Física muito importante e é base para desenvolvimento de outros temas. Por isso, a AFA exige dos candidatos uma excelente preparação, com todos os fundamentos bem consolidados nos seus alunos.

Dentro de Mecânica, temos os seguintes assuntos mais cobrados:

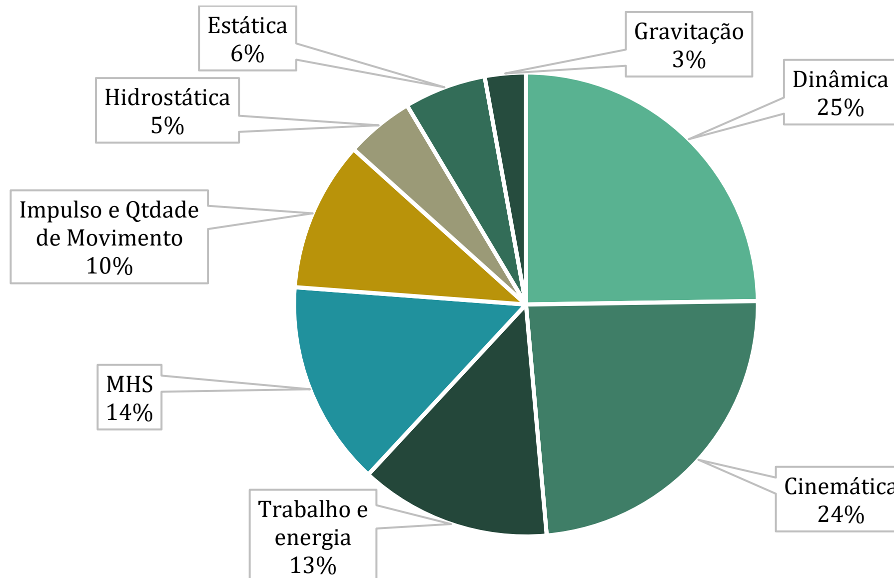


Figura 2: Assuntos que mais caíram na AFA dentro de Mecânica.

Depois de Dinâmica, Termologia e Eletricidade surgem como matérias com alta incidência na prova. Esses assuntos serão fortemente abordados no nosso curso.

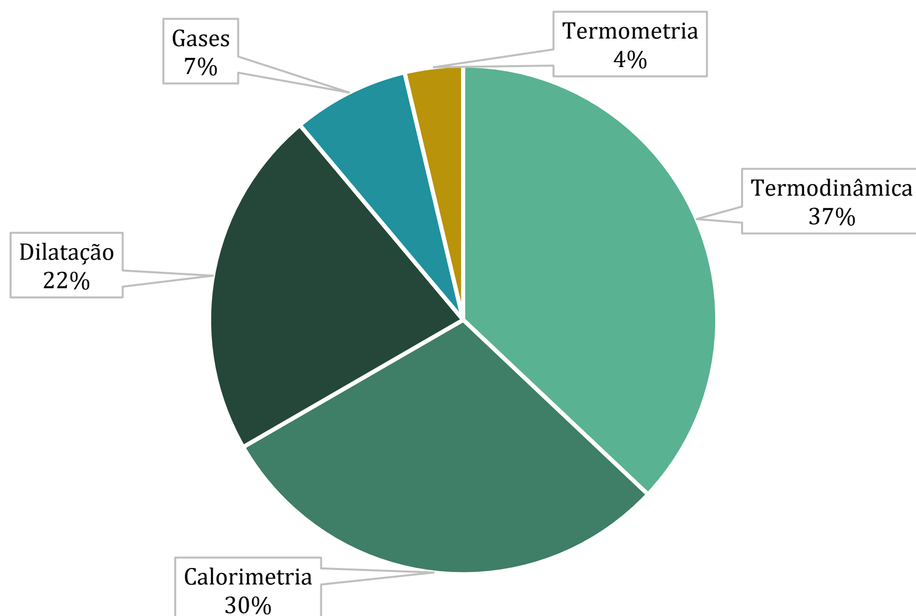


Figura 3: Temas que mais caíram na AFA dentro de Termologia.

Dentro de eletricidade, destacam-se os temas: força elétrica, campo elétrico, potencial elétrico, capacitores. Em eletrodinâmica destacam-se os assuntos: primeira lei de Ohm, potência elétrica, geradores elétricos e circuitos elétricos.

Além disso, a AFA gosta de cobrar interação de uma carga em uma região onde existe um campo magnético uniforme, fio percorrido por corrente e indução eletromagnética.

Cronograma De Aulas

Aula 0	Conceitos de espaço e de tempo. Velocidade média. Funções horárias de espaço e de velocidade. Movimento retilíneo uniforme (MRU).
Aula 1	Aceleração. Movimentos acelerados e retardados. Movimento retilíneo uniformemente variado (MRUV). Movimento vertical no vácuo. Análises gráficas.
Aula 2	Movimento circular. Movimento circular uniforme (MCU). Movimento circular uniformemente variado (MCUV). Transmissão de movimentos.
Aula 3	Cinemática vetorial. Velocidade vetorial. Aceleração vetorial. Composição de movimentos. Lançamento oblíquo.
Aula 4	Os princípios da dinâmica. As leis de Newton. Equilíbrios de um corpo. Forças em fios. Vínculos geométricos. Referenciais inerciais. Referenciais não-inerciais. Força Elástica.
Aula 5	Força de Atrito. Dinâmica do movimento curvilíneo.
Aula 6	Trabalho, potência e energia. Conservação da energia mecânica. Teorema da energia cinética. Trabalho das forças não conservativas.
Aula 7	Impulso e quantidade de movimento.
Aula 8	Colisões e centro de massa.
Aula 9	Estática do ponto material e do corpo extenso. Tipos de equilíbrios. Condições de tombamento e de escorregamento.

1. Introdução

Olá futuros CADETES! Sejam bem-vindos ao nosso curso de física para a Academia da Força Área (AFA).

O objetivo do nosso curso é oferecer, de forma mais completa, as bases necessárias da Física e ir para o nível exigido por esses dois vestibulares. Diante da fama desses vestibulares, nosso curso de Física será bem amplo, sendo prioritariamente assuntos de ensino médio com alguns temas abordados em nível superior.

Não há dúvidas que existem excelentes livros de Física pelo mundo a fora, entretanto, poucos são focados para a AFA. É preciso ter um certo cuidado na preparação, pois é muito comum os vestibulandos errarem a mão nos estudos: ou estudam determinados assuntos além do exigido pelo vestibular e acabam levando mais tempo para passar ou estudam de menos sem fazer questões no nível do concurso.

Para garantir que você esteja estudando de maneira focada para o vestibular, nós preparamos um material completo, sendo cuidadosos nos assuntos específicos de Física. Inicialmente, começaremos com questões para consolidar a teoria, seguido de questões de nível médio, em geralmente, questões objetivas da AFA e, por fim, questões mais difíceis (em geral, discursivas).

Essa ordem crescente de dificuldade é fundamental para o estudo e, além disso, é muito importante que você saiba em qual nível se encontra. Tudo isso para você ter a teoria completa, com a melhor sequência de exercícios, sem sair do foco do vestibular.

Dessa forma, acredito que, independentemente do nível em que você esteja ou da cidade em que você more, você tem totais condições para fazer sua jornada rumo à AFA.

“O segredo do sucesso é a constância no objetivo”

2. Introdução à Física

Esta parte da Física não costuma aparecer com questões puramente de Introdução à Física. Entretanto, utilizaremos algumas considerações vistas nestes tópicos.

De uma forma geral, podemos dizer que Física é a ciência que estuda as leis do universo, buscando entender as causas e os efeitos dos fenômenos físicos na natureza.

Na Física, as grandezas são propriedades mensuráveis de um fenômeno, corpo ou substância. Quando medimos essas propriedades, dividimos quantitativamente em dois grupos:

- **Grandezas escalares**: são aquelas que necessitam apenas de um número para representar sua magnitude e sua unidade de medida. Por exemplo: tempo, massa, temperatura etc.

- **Grandezas vetoriais**: são aquelas que necessitam de um número para representar sua magnitude, uma orientação (direção e sentido), e sua unidade de medida. Por exemplo: deslocamento, velocidade, aceleração, força, campo elétrico etc.

Unidade de medida é uma medida específica para uma determinada grandeza física. Por exemplo: unidade de tempo é segundo (s), unidade de massa é quilograma (kg) etc.

Esta parte de algarismos significativos é apenas para você ter uma noção de como são tratados os resultados em experimentos de laboratórios e ter uma ideia da importância de saber que o resultado extraído por um instrumento de medida sempre trará incertezas (primeiro duvidoso). Mas ainda não é um curso sobre incertezas e erros de medidas. Não fique muito tempo preso a essa parte do curso. Saiba trabalhar com notação científica e ordem de grandeza, pois esses conceitos são mais importantes.

2.1. Noções de algarismos significativos

Este tópico não é muito cobrado pela AFA, então é muito mais para você ter uma noção sobre algarismos significativos, algo muito importante em laboratório junto com teoria de erros de medida. Não fique muito tempo preso a esta parte da aula. Notação científica e ordem de grandeza é mais importante.

Para entendermos o conceito de Algarismos Significativos, vamos pegar um exemplo de medida. Suponha que uma pessoa tenha uma régua graduada em milímetros, isto é, sua menor subdivisão corresponde a um milímetro.



Figura 4: Figura ilustrativa para representar uma régua milimétrica.

Vamos usar esta régua para medir o tamanho de uma pequena haste rígida, posicionando uma das extremidades da barra na origem da régua. Em seguida, uma pessoa realiza a medida.



Figura 5: Régua milimétrica utilizada para medir uma haste metálica.

Vamos supor que a pessoa apresentou o seguinte valor de medida: $l = 6{,}7578823\ cm$. De imediato, percebemos que esta régua não tem condições de fornecer uma medida com tamanha precisão. Diante disso, dizemos que nem todos os algarismos fornecidos são significativos, ou seja, alguns algarismos foram colocados sem critérios de medida e, por isso, não possuem qualquer significado no resultado.

De acordo com o instrumento de medida que a pessoa possui, podemos observar que ela tem condições apenas de avaliar até décimos de milímetros, pois a régua é graduada até milímetros e não dispõe de meios para garantir medidas na ordem de centésimos ou milésimos de milímetros.

Analisando a medida apresentada (vamos sempre analisar do algarismo da esquerda para a direita), notamos que o algarismo 6 está correto, pois ele indica a quantidade em centímetros, isto é, a haste possui 6 centímetros. O algarismo 7 corresponde a quantidade em milímetros, visivelmente, na régua, por isso, ele está correto também. Dessa forma, os números 6 e 7 são chamados de significativos.

O próximo algarismo corresponde aos décimos de milímetros e nossa régua não possui esta graduação. Dizemos que esse algarismo foi obtido de acordo com a avaliação visual da pessoa, por isso, chamamos de algarismo duvidoso (uma outra pessoa poderia indicar outro valor para este algarismo). Contudo, como o algarismo 5 é o primeiro duvidoso, ainda o consideramos significativo, isto é, o primeiro duvidoso também é significativo. Para os demais algarismos (7,8,8,2,3), a pessoa não possui recursos para avaliar com rigor a medição. Por isso, esses algarismos são chamados de não significativos.

Sendo assim, podemos dizer que a medida possui 3 algarismos significativos, com os dois primeiros algarismos corretos e o último (mais à direita) o primeiro duvidoso. Então, podemos enunciar que:

Os algarismos significativos são aqueles que certificamos estarem corretos, mais o primeiro duvidoso.

Concluímos, então, que a medida do comprimento da haste rígida é $l = 6{,}75\ cm$.

Se transformamos a unidade de medida de centímetros para metros, obtemos que $l = 6{,}75\ cm = 0{,}0675\ m$. Essa mudança alterou a quantidade de algarismos significativos? A resposta é **não**. Ao trocarmos a unidade de medida não alteramos a forma da medição (não mudamos o instrumento de medida). Dessa forma, os zeros à esquerda do 6 apenas posicionam a vírgula para a nova unidade de medida da haste. Portanto, podemos enunciar a seguinte regrinha:

Zeros à esquerda do primeiro algarismo diferente de zero não são algarismos significativos.

Vamos analisar agora um novo exemplo em que um estudante dispõe de uma balança graduada em décimos de quilograma e deseja realizar a medida da massa m de um objeto qualquer.



Figura 6: Figura ilustrativa para mostrar a importância dos zeros a direita em algarismos significativos.

Primeiramente, certificamos que o número 0 está correto e o mesmo ocorre com relação ao 6 (medição seria 0,6... kg). O primeiro algarismo duvidoso seria o 0 (primeiro duvidoso também é significativo), mas 0 é ou não é significativo? Zeros à esquerda do primeiro algarismo diferente de zero não são significativos, entretanto, zeros à direita são.

Dessa conclusão, podemos enunciar outra regrinha:



*Zeros à **direita** do primeiro algarismo diferente de zero **são algarismos significativos**, respeitando as definições apresentadas.*

2.1.1. Operações matemáticas com algarismos significativos

Após ter feito medições e respeitadas as regras de algarismos significativos, fatalmente você fará operações para manipular seus dados e, para isso, terá que levar em conta algumas regrinhas para apresentar o resultado dos cálculos:

- **Adição e subtração**: nessas operações devemos deixar a resposta com o menor número de casas decimais. Exemplo de adição: somar 2,4 cm (1 casa decimal) com 3, 18 cm (2 casas decimais):

$$+\frac{\substack{2{,}4\\3{,}18}}{5{,}58}$$

Para escrevermos o resultado, devemos deixar o valor obtido com apenas uma casa decimal (menor número de casas) e como o terceiro algarismo é 8 ($8 > 5$), devemos arredondar o primeiro algarismo a esquerda do 8 para cima, isto é, ajustar 5 para 6. Portanto, obtemos $5{,}6\ cm$. Exemplo de subtração: subtrair 1,14 km (2 casas decimais) de 6,573 km (3 casas decimais):

$$-\frac{\substack{6{,}573\\1{,}14}}{5{,}433}$$

Novamente, antes de expressarmos o resultado, devemos deixar o valor obtido com duas casas decimais e manter a segunda casa decimal igual a 3, pois, o último algarismo é 3 ($3 < 5$). Assim, obtemos 5,43 km.

- **Multiplicação e divisão:** convencionamos deixar o resultado com o mesmo número de algarismos significativos do fator que tiver menos significativos, podendo tolerar até 1 a mais. Exemplo de multiplicação: Calcule a área do retângulo cujas medidas são 4,8 m e 6,903 m. Notamos que 4,8 possui 2 algarismos significativos e 6,903 possui 4 algarismos significativos. Portanto, nosso resultado pode ter 2 ou 3 significativos:

$$4{,}8\ x\ 6{,}903 = 33{,}1344\ m^2$$

Assim, obtemos $33\ m^2$. Tolera-se 1 algarismo significativo a mais e o segundo decimal é o número 3 ($3 < 5$). Portanto, chegamos ao resultado $33{,}1\ m^2$.

Exemplo de divisão: determine o comprimento de um terreno retangular onde a área é $500\ m^2$ e largura é $15{,}3\ m$. Note que 500 e 15,3 possuem 3 algarismos significativos. Assim, devemos deixar o resultado também com 3 algarismos significativos:

$$500\ \div 15{,}3 = 32{,}679739\ m$$

Dessa forma, obtemos $32\ m$, arredondando 6 para 7, pois $7 > 5$, concluímos que o comprimento será $32{,}7\ m$.

2.2. Notação científica

Para se escrever o valor numérico em trabalhos científicos utilizamos a notação científica. Para isso, utilizamos a potência de dez, tomando o cuidado de conservar à esquerda da vírgula com apenas um dígito diferente de zero.

Exemplos:

Número	Notação científica	Número de Algarismos significativos
150	$1{,}50 \cdot 10^2$	3
$52{,}34$	$5{,}234 \cdot 10^1$	4
$0{,}00760$	$7{,}6 \cdot 10^{-3}$	3
$1{,}0502$	$1{,}0502 \cdot 10^0$	5

Quando utilizamos a notação científica, temos uma rápida visualização da grandeza (a potência de 10) e do número de algarismos significativos. Além disso, as facilidades de trabalhar matematicamente com esses valores tornam muito útil a representação por notação científica.

Podemos escrever o valor de uma grandeza física na forma:

$$x \cdot 10^n, \text{ onde } 1 \leq x < 10 \text{ e } n \in \mathbb{Z}$$

Por exemplo, o raio da Terra é próximo de 6371 km. Em notificação científica escrevemos que $6371\ km \Rightarrow 6{,}371 \cdot 10^3\ km = 6{,}371 \cdot 10^6\ m$. Outros exemplos conhecidos é a massa do elétron, $9{,}1 \cdot 10^{-31} kg$ e a carga elementar $1{,}6 \cdot 10^{-19}\ C$.

2.3. Ordem de grandeza

Em muitas ocasiões é necessário estimar o valor de uma certa grandeza, ainda não seja seu valor real. Para isso, buscamos estimar o valor mais próximo da grandeza, utilizando potências de 10.

Por exemplo, quanto é a ordem de grandeza de um homem que possui 1,80 metros de altura em centímetros? Quando transformamos a altura em centímetros, temos que $1{,}80\ m \equiv 180\ cm$. Assim, a potência de 10 mais próxima seria 10^2. Logo, a ordem de grandeza (OG) é de $10^2\ (cm)$.

De um modo geral, utilizamos a seguinte regra para determinar a ordem de grandeza, a partir da notação científica:

$$x \cdot 10^n, onde\ 1 \leq x < 10, n \in \mathbb{Z}$$

Então:

$$x < 3{,}16 \Rightarrow OG = 10^n$$

$$x \geq 3{,}16 \Rightarrow 10^{n+1}$$

Note que podemos determinar a ordem de grandeza do homem do nosso exemplo da seguinte forma:

$$1{,}80\ m \equiv 1{,}80 \cdot 10^2\ cm \Rightarrow 1{,}80 < 3{,}16 \Rightarrow OG = 10^2\ \ (cm)$$

O fato do marco divisório entre as potências de 10 ser o número $\sqrt{10} \cong 3{,}16$ vem do fato dele ser ponto médio entre os expoentes das potências de 10:

$$10^0 \quad 10^{1/2} \quad 10^1$$

Tirando a média geométrica dos extremos possíveis valores para a notação científica:

$$\sqrt{1 \cdot 10} = \sqrt{10} \cong 3{,}16$$

3. Vetores

Como vimos anteriormente, podemos dividir as grandezas físicas em escalares e vetoriais. As grandezas escalares necessitam apenas da sua magnitude e sua unidade de medida para estarem definidas. Por outro lado, as grandezas vetoriais precisam de mais informações.

Por exemplo, quando estamos perdidos e pedimos informação para alguém. Se a pessoa disser apenas que você está a alguns quilômetros do seu destino, isso não é o suficiente para você chegar até lá. A primeira pergunta que você fará para o informante é: para qual direção? E qual sentido?

O estudo dos vetores é fundamental para a melhor compreensão das grandezas físicas. Algumas definições são feitas diretamente por produto escalar ou produto vetorial, por exemplo. Por isso, vamos estudar o que são vetores e os principais cálculos utilizados na Física. Para o nosso curso, estudaremos e mostraremos somente aquilo que for útil para sua aprovação.

3.1. Definições básicas dos vetores

Vetor é um ente matemático determinado por segmentos orientados caracterizados por: módulo, direção e sentido. Para representá-lo no espaço, precisamos definir um comprimento proporcional ao seu módulo (sempre um número real positivo).

Normalmente, indicamos um vetor por uma letra com uma flecha em cima: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{u}, \vec{V}$ etc. Em textos impressos, os vetores podem ser denotados também por negrito: $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{V}$ etc. Para se referir apenas ao módulo do vetor, denotamos por $|\vec{a}|$ ou simplesmente a (sem negrito), como mostrado na figura abaixo:

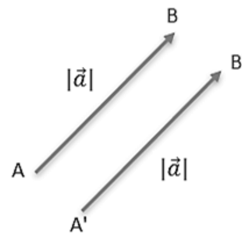


Figura 7: Representação geométrica de dois vetores.

Repare que A e A' representam as origens dos vetores, B e B' representam as extremidades dos vetores. É muito importante você olha para um vetor e identificar onde está a origem e onde está a extremidade do vetor.

Assim, verificamos que os segmentos $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{A'B'}$ estão em direções orientadas paralelas entre si, com mesmo sentido, e os comprimentos destes segmentos de retas são iguais. Diante disso, podemos afirmar a condição de igualdade entre dois vetores:

Dois vetores são iguais entre si quando possuem mesmo módulo, mesma direção e mesmo sentido.

Assim, podemos dizer que: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'} = \vec{a}$. Portanto, $\vec{a}$ é o vetor que os dois segmentos de reta representam.

3.2. Operações matemáticas com vetores

Semelhante a álgebra dos números, é possível realizar diversas operações com vetores. Nós estudaremos aquelas mais usais em física. Para realizar essas operações, é necessário tomar alguns cuidados, pois, diferente dos números, existem regras próprias.

Algumas operações abordadas neste curso: Adição de vetores; Multiplicação de vetor por escalar; Subtração de vetores; Produto escalar; e Produto vetorial.

3.3. Adição de vetores

Para somar dois vetores, vamos introduzir a ideia através de um exemplo. Suponha que um jovem atleta deseje correr em uma praça em formato de um triângulo retângulo conforme a figura abaixo. Ele sai do ponto A em direção ao ponto B, em seguida para o ponto C.

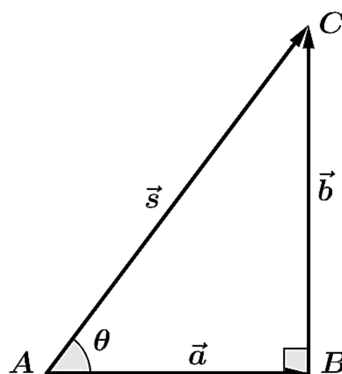


Figura 8: Imagem representativa de uma praça para efeitos didáticos.

A praça possui as seguintes dimensões: $AB = 60\ m$, $BC = 80\ m$ e $AC = 100\ m.$ Indicamos por $\vec{a}$ o vetor deslocamento no trecho $\overline{AB}$, por $\vec{b}$ o vetor deslocamento no trecho $\overline{BC}$ e por $\vec{s}$ o deslocamento resultante. Matematicamente, dizemos que:

$$\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$$

Observe que, em módulos, $\vec{s} \neq \vec{a} + \vec{b}$, isto é, o tamanho do vetor $\vec{s}$ é diferente da soma dos módulos de $\vec{a}$ e $\vec{b}$. Para encontrar o módulo do vetor resultante, dados que $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são perpendiculares entre si, utilizaremos sempre o teorema de Pitágoras:

$$s^2 = a^2 + b^2$$

$$s^2 = 60^2 + 80^2 \therefore s = 100\ m$$

Tudo o que nós fizemos até aqui, é definir apenas o módulo do vetor $\vec{s}$. Para definir completamente o vetor, precisamos definir a direção, isto é, o ângulo θ que o vetor faz com o segmento $\overline{AB}$. Este ângulo pode ser determinado por intermédio da tangente do ângulo θ:

$$tg(\theta) = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} = \frac{80}{60} = \frac{4}{3} \Rightarrow \theta = arctg\left(\frac{4}{3}\right) \approx 53{,}1°$$

A partir desse exemplo, podemos ver que somar dois vetores não é simplesmente somar dois números. Somar vetores é uma operação geométrica.

Antes de caminharmos para as regras de adição de vetores, vamos trabalhar alguns casos especiais, onde os vetores estão em mesma direção:

- Vetores com mesma direção e mesmo sentido:

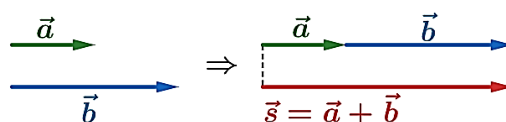


Figura 9: Soma de vetores mesma direção.

Dessa forma, ao somar 2 vetores que têm a mesma direção e sentido, o vetor resultante terá a mesma direção e sentido dos operandos e seu módulo será a soma dos módulos.

- Vetores com mesma direção e sentidos opostos:

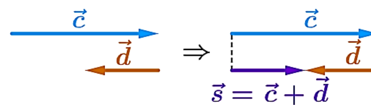


Figura 10: Soma de vetores direção oposta.

Assim, ao somarmos dois vetores que têm mesma direção e sentidos opostos, a direção do vetor resultante será a mesma dos vetores operandos, mas o sentido será determinado por aquele que tiver o maior módulo. O módulo do vetor resultante será dado pela diferença do maior módulo com o menor módulo.

3.4. Regra do polígono

Para somar vetores, existe uma regra geométrica que é definida pela álgebra dos vetores. Essa regra mãe é chamada de regra do polígono. Basta seguir os passos e não terá erro. Ela é apenas uma generalização da ideia que apresentamos sobre soma de vetores.

Vamos pegar 4 vetores distintos, de acordo com a figura abaixo:

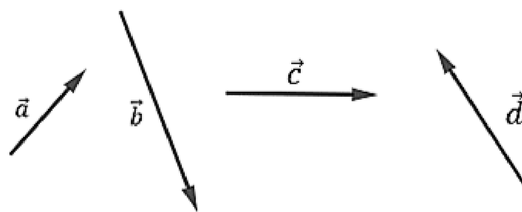


Figura 11: Vetores a serem somados pela regra do polígono.

O vetor resultante pode ser obtido da seguinte forma:

1) Escolhe um vetor para ser o "vetor origem" (escolhemos o vetor $\vec{a}$). A partir dele, escolha qualquer um (escolhemos o vetor $\vec{d}$) e coloque a origem do vetor escolhido na extremidade do "vetor origem";
2) Em seguida, escolhe qualquer um dos vetores que sobrou e coloque a origem na extremidade do vetor anterior ($\vec{d}$) e assim, até que todos os vetores estejam colocados em ordem, a origem na extremidade do anterior;
3) O vetor resultante está determinado ligando a origem do primeiro vetor à extremidade do último.

A figura abaixo ilustra nosso exemplo:

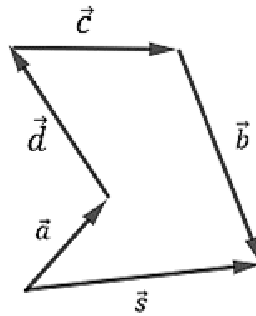


Figura 12: Vetor resultante utilizando a regra do polígono.

A forma como mostramos a regra do polígono ilustra as propriedades comutativa e associativa da soma de vetores.

Propriedades:

- ✓ Propriedade comutativa: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$;
- ✓ Propriedade associativa: $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$.

Para nosso caso, queremos saber $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$ e pelas propriedades comutativa e associativa podemos escrever que: $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{a} + \vec{d} + \vec{c} + \vec{b}$.

Com esse exemplo, vemos que não importa a ordem como escolhemos os vetores desde que sejam respeitadas as regras.

Além disso, podemos ver que se efetuarmos a soma e a extremidade do último cair na origem do primeiro, teremos um polígono fechado dos vetores, de tal forma que a extremidade do vetor soma coincide com a própria origem. Então, o vetor resultante será o vetor nulo ($\vec{0}$).

3.5. Regra do paralelogramo

Trata-se da particularização da regra do polígono quando temos apenas 2 vetores para somar e os vetores estão com origem em comum. É muito importante identificar que os vetores estão com origem em comum.

Nós estudamos esse caso de dois vetores estarem com origem em comum, pois essa condição aparecerá muito nas nossas vidas. Estaremos por diversas vezes querendo calcular força resultante, campo elétrico resultante, exatamente na condição da regra do paralelogramo. Por isso foi criada essa regra prática.

Não confunda a regra do paralelogramo com a lei dos cossenos da matemática. Para que você não caía em pegadinhas, vamos primeiro recordar a lei dos cossenos conforme ensina a geometria plana.

Existem **duas leis importantes da geometria plana para um triângulo qualquer**:

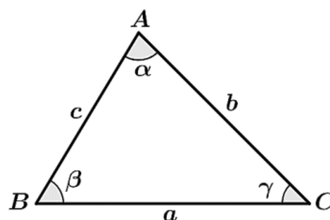


Figura 13: Triângulo qualquer.

- **Lei dos senos:**

$$\frac{a}{sen\alpha} = \frac{b}{sen\beta} = \frac{c}{sen\gamma}$$

- **Lei dos cossenos:**

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2. b. c. cos\alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2. a. c. cos\beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2. a. b. cos\gamma$$

Repare que a lei dos cossenos diz que se você escolhe um lado, então ele ao quadrado é igual à soma dos quadrados dos outros dois, menos duas vezes o produto dos outros dois, vezes ainda o cosseno do ângulo que olha para o lado que você escolheu.

Para entender a regra do paralelogramo, vamos definir os passos que você deve fazer.

Primeiramente, colocamos os dois vetores com origem em comum (ponto O) e construímos um paralelogramo, fazendo linhas tracejadas paralelas aos vetores, passando pelas extremidades dos operandos.

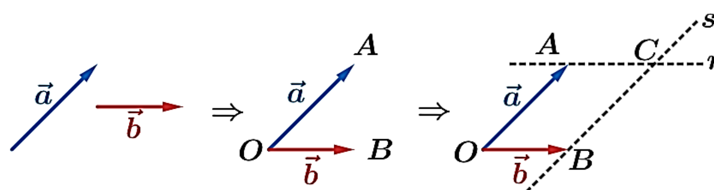


Figura 14: Reta s paralela a OA e reta r paralela a OB, definindo o paralelogramo OACB.

Em seguida, liga-se a origem dos vetores (ponto O) ao encontro das linhas tracejadas (ponto C), determinando o vetor resultante $\vec{s} = \overrightarrow{OC}$, conforme figura abaixo:

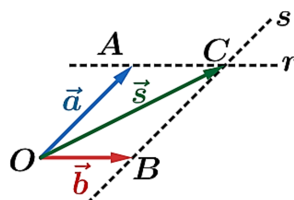


Figura 15: Vetor soma definido da origem em comum ao encontro das retas r e s.

Olhando para o paralelogramo abaixo, podemos aplicar a regra do paralelogramo, lembrando algumas propriedades da Geometria Plana e da Trigonometria:

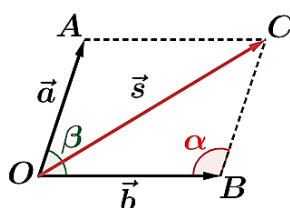


Figura 16: Vetor resultante.

Perceba que o vetor soma $\vec{s}$ não olha para o ângulo β, quem olha para o vetor $\vec{s}$ é o ângulo α. Aplicando a lei dos cossenos conforme manda a geometria plana, temos:

$$s^2 = a^2 + b^2 - 2a.b.\cos\alpha$$

Mas, sempre que vamos determinar o vetor soma, vamos fazer isso, colocar os vetores com origem em comum e aplicar a regra do paralelogramo. Assim, sempre vamos definir e a questão vai fornecer o ângulo formado pelos vetores com origens em comum, o ângulo β da figura logo acima.

Dessa forma, vamos definir nossa lei dos cossenos da Física para soma de vetores que possuem origens em comum e é dado o ângulo entre os vetores.

No triângulo OBC, vamos chamar o ângulo $O\hat{B}C$ de α e o ângulo $A\hat{O}B$ de β (ângulo entre os dois vetores). De acordo com a Geometria Plana, $\alpha + \beta = 180° \Rightarrow \beta = 180 - \alpha$. Da Trigonometria, sabemos que $\cos\beta = -cos\alpha$. Então, aplicando a lei dos cossenos para o triângulo OBC, temos:

$$s^2 = a^2 + b^2 - 2a.b.\cos\alpha \Rightarrow s^2 = a^2 + b^2 + 2.a.b.(-cos\alpha)$$

$$\therefore \boxed{s^2 = a^2 + b^2 + 2.a.b.cos\beta}$$

Esse resultado que acabamos de encontrar para s não é uma nova lei dos cossenos. Isso é a regra do paralelogramo. A lei dos cossenos é uma lei da geometria plana e é imutável.

Diante desse resultado, podemos criar um método para determinar o módulo do vetor soma através da regra do paralelogramo. Aplicando os passos:

- Coloca-se os vetores em origem comum;
- Conhecemos o valor do ângulo formado pelos vetores que queremos somar;
- Cumpridos os passos 1 e 2, aplicamos a fórmula anterior ($s^2 = a^2 + b^2 + 2.a.b.cos\beta$) e encontramos o vetor desejado.

3.6. Decomposição de vetores

Este método é muito importante na Física, pois podemos descrever diversas grandezas vetoriais em sistemas de coordenadas xyz (problemas em 3 dimensões) ou xy (problemas em 2 dimensões) para resolver questões. É comum colocar as variáveis em um mesmo eixo para resolver os problemas.

Pegamos um vetor $\vec{F}$ qualquer (pode ser uma força, por exemplo). Pela regra do paralelogramo, podemos dizer que é a soma de outros dois vetores, por exemplo:

$$\vec{F} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}$$

Neste momento, é interessante observar que para melhorar as contas é interessante escolher um paralelogramo que possua propriedades que facilitam nossas contas, paralelogramos com ângulos interessantes. Da matemática sabemos que um retângulo é um tipo de paralelogramo com ângulos de 90° e isto facilita muito as contas. Então, o melhor caminho é escolher vetores que sejam ortogonais, isto é, formam um ângulo de 90° quando colocadas as origens em comum. Uma vez que os vetores podem ser ortogonais, podemos usar os sistemas de eixos coordenadas para auxiliar.

Dessa forma, podemos escrever $\vec{F}$ como a soma de um vetor no eixo x ($\overrightarrow{F_x}$) e outro vetor no eixo y ($\overrightarrow{F_y}$). Assim, temos que:

$$\vec{F} = \overrightarrow{F_x} + \overrightarrow{F_y}$$

Podemos representar da seguinte forma:

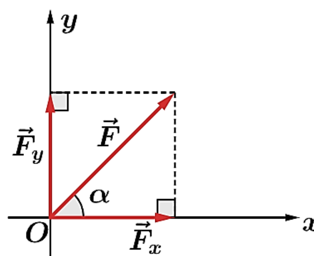


Figura 17: Decomposição de vetores no plano xy.

Esses vetores $\overrightarrow{F_x}$ e $\overrightarrow{F_y}$ são chamados de projeções do vetor $\vec{F}$ nos eixos x e y, respectivamente. Pela geometria, podemos dizer que:

$$\begin{cases} cos\alpha = \dfrac{F_x}{F} \Rightarrow F_x = F.cos\alpha \\ sen\alpha = \dfrac{F_y}{F} \Rightarrow F_y = F.sen\alpha \end{cases}$$

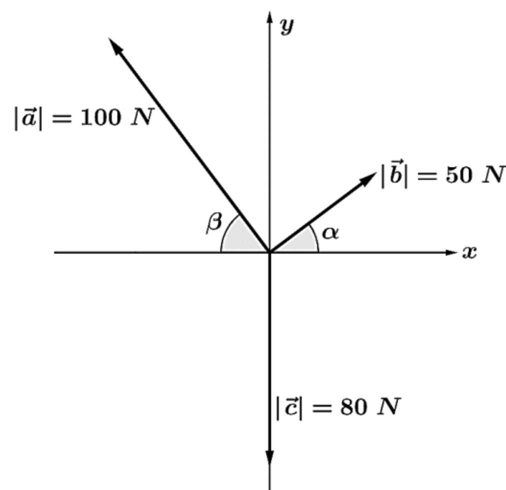
Por Pitágoras, temos:

$$F^2 = F_x^2 + F_y^2$$

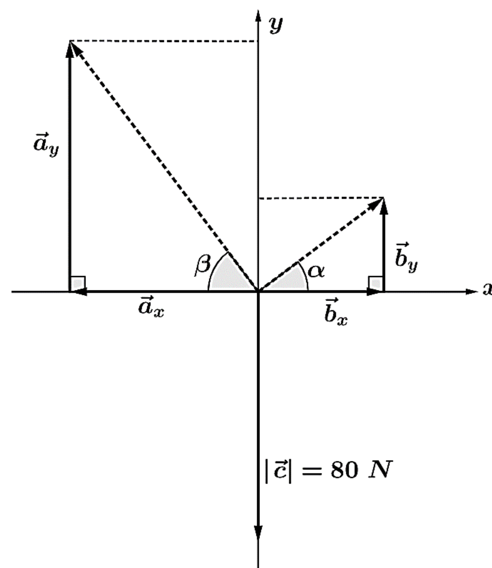
Por esse método, se temos vários vetores a serem somados, basta colocar todos na mesma origem e os projetar nos eixos x e y. Em seguida, efetua-se a soma de acordo com as regras de adição em mesma direção, obtendo um vetor resultante em cada eixo.

Para concluir, basta usar a regra do paralelogramo para esses dois vetores restantes para obter o vetor soma desejado. Como os eixos são sempre ortogonais, vamos sempre recair em dois vetores ortogonais, com fácil aplicação do teorema de Pitágoras para o vetor desejado.

Exemplo: determine o vetor soma $\vec{s}$ entre os vetores dados $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Dado que $\cos\alpha = 0{,}6$ e $sen\beta = 0{,}8$.



Primeiramente, iremos decompor cada vetor nos eixos x e y.



Lembre-se que pela relação fundamental, $sen^2(x) + \cos^2(x) = 1$, então se conhecemos o seno também sabemos o cosseno (para um ângulo agudo não precisa discutir o sinal pois seno e cosseno são positivos).

Pela decomposição, temos:

$$|a_x| = |\vec{a}| \cdot \cos(\beta) = 100 \cdot 0{,}6 = 60\ N$$

$$|\vec{a}_y| = |\vec{a}| \cdot sen(\beta) = 100 \cdot 0{,}8 = 80\ N$$

O mesmo ocorre para $\vec{b}$:

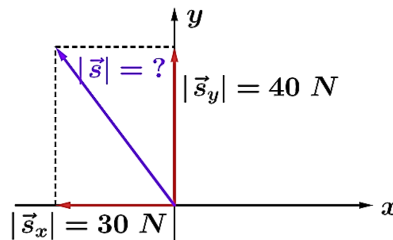
$$|\vec{b}_x| = |\vec{b}| \cdot \cos(\alpha) = 50 \cdot 0{,}6 = 30\ N$$

$$|\vec{b}_y| = |\vec{b}| \cdot sen(\alpha) = 50 \cdot 0{,}8 = 40\ N$$

Portanto, temos os seguintes vetores resultantes para cada eixo:

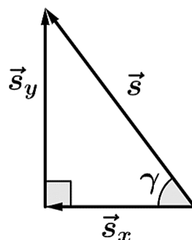
$$\begin{cases} s_x = a_x - b_x = 60 - 30 = 30\ N \\ s_y = a_y + b_y - c_y = 80 + 40 - 80 = 40\ N \end{cases}$$

Assim, reduzimos nossos vetores aos resultantes em cada eixo:



$$s^2 = s_x^2 + s_y^2 = 30^2 + 40^2 = 2500 \Rightarrow s = 50\ N$$

Para finalizar, devemos determinar sua direção e sentido para que o vetor fique completamente definido, como na figura abaixo:



Logo:

$$tg\gamma = \frac{|\vec{s}_y|}{|\vec{s}_x|} = \frac{40}{30} = \frac{4}{3} \Rightarrow \gamma = arctg\left(\frac{4}{3}\right) \Rightarrow \gamma \approx 53{,}1°$$

Com este exemplo, concluímos que qualquer vetor pode ser projetado em eixos ortogonais entre si. Dado um sistema coordenado no R^3 (x, y, z), conforme figura abaixo, podemos decompor o vetor $\vec{a}$ nos três eixos:

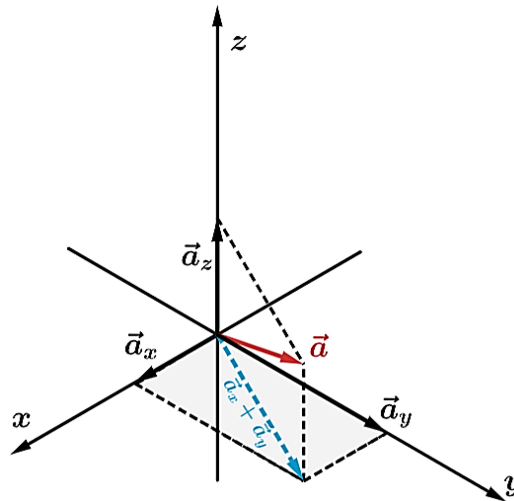


Figura 18: Representação de um vetor no espaço.

Por Pitágoras vemos que o módulo de $\overrightarrow{a_x} + \vec{a}_y$ é dado por:

$$|\vec{a}_x + \vec{a}_y|^2 = |\vec{a}_x|^2 + |\vec{a}_y|^2$$

$$|\vec{a}_x + \vec{a}_y| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

Ao fazer $(\vec{a}_x + \vec{a}_y) + \vec{a}_z$ encontramos o vetor $\vec{a}$ que desejamos e para determinar o módulo, basta fazer novamente um Pitágoras:

$$|(\vec{a}_x + \vec{a}_y) + \vec{a}_z|^2 = |\vec{a}_x + \vec{a}_y|^2 + |\vec{a}_z|^2$$

$$|(\vec{a}_x + \vec{a}_y) + \vec{a}_z|^2 = |\vec{a}_x|^2 + |\vec{a}_y|^2 + |\vec{a}_z|^2$$

$$\therefore \boxed{|\vec{a}_x + \vec{a}_y + \vec{a}_z| = |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}$$

Assim, representar um vetor por suas componentes torna a operação de soma muito mais simplificada, pois, para somar dois vetores, basta somar as partes:

$$\begin{cases} \vec{a} = (a_x, a_y, a_z) \\ \vec{b} = (b_x, b_y, b_z) \\ \vec{r} = (r_x, r_y, r_z) \end{cases} \Rightarrow \vec{r} = \vec{a} + \vec{b} \therefore \begin{cases} r_x = a_x + b_x \\ r_y = a_y + b_y \\ r_z = a_z + b_z \end{cases}$$

Essa notação, simplificará nossas vidas futuramente. É comum aparecer questões no R^3 e, ter noção espacial, ajuda bastante na prova.

3.7. Multiplicação por um escalar

Outra operação muito comum e importante no universo dos vetores é a multiplicação de um vetor por um escalar. Podemos denotar essa operação da seguinte forma:

$$\vec{b} = n.\vec{a}$$

Em que n é um número real qualquer, $\vec{b}$ é o vetor obtido ao multiplicar o vetor $\vec{a}$ pelo escalar n.

Como resultado dessa definição, podemos notar que:

1) $|\vec{b}| = |n.\vec{a}| \Rightarrow |\vec{b}| = |n|.|\vec{a}|$, isto é, o módulo do vetor obtido é o produto do módulo do escalar pelo módulo do vetor multiplicado. Multiplicar pelo escalar é alterar o tamanho do vetor. Ao efetuar essa operação existem dois possíveis tipos de mudança no modulo:

    - ✓ $|n| > 1 \Rightarrow |\vec{b}| > |\vec{a}|$;
    - ✓ $0 \leq |n| \leq 1 \Rightarrow |\vec{b}| \leq |\vec{a}|$;

2) $\vec{b}$ tem a mesma direção de $\vec{a}$;

3) o sentido de $\vec{b}$ é o mesmo de $\vec{a}$ quando $n > 0$ e o sentido de $\vec{b}$ é o contrário de $\vec{a}$ quando $n < 0$. Se $n = 0$, obtemos como resultado o vetor nulo, representado por $\vec{0}$.

    Quando o vetor representado na forma $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, então o valor de $\vec{b} = n.\vec{a}$ é dado por $\vec{b} = (na_x, na_y, na_z)$;

4) Para o caso de $n = -1$, o vetor obtido recebe o nome de vetor oposto, pois como para os números, o oposto é um número que somado ao próprio número dá como resultado zero. Por exemplo, o oposto de 10 é -10, pois $10 + (-10) = 0$. Como visto no item anterior, ao multiplicar por um número negativo, troca-se o sentido do vetor. Dessa forma, o vetor oposto a $\vec{b}$ é o vetor $-\vec{b}$, pois, teremos que: $\vec{b} + (-\vec{b}) = \vec{0}$.

Neste momento, podemos falar de um vetor muito importante para representações físicas, com uma aplicação que facilita muito nossa vida.



3.8. Vetores unitários ($\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$)

Vetor unitário (as vezes chamado de versor) é aquele cujo módulo é igual a 1. Existem dois vetores unitários que formam a base canônica, no $R^2((x, y))$, que são dados por:

$$\vec{\imath} = (1,0)\ e\ \vec{\jmath} = (0,1)$$

Observação: A teoria de espaço vetorial e base canônica será abordado nos cursos de Cálculo Vetorial, apenas saiba que existe esse termo. Preliminarmente, essa base mostra que todos os vetores do espaço vetorial podem ser escritos a partir dela.

Para o R^3, temos a seguinte base canônica:

$$\vec{\imath} = \hat{\imath} = (1,0,0), \vec{\jmath} = \hat{\jmath} = (0,1,0)\ e\ \vec{k} = \hat{k} = (0,0,1)$$

Para construir um vetor unitário $\vec{u}$ que tenha a mesma direção e o mesmo sentido que o vetor $\vec{a}$, devemos dividir o vetor $\vec{a}$ pelo seu módulo:

$$\vec{u} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}\ ou\ \hat{u} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

3.9. Decomposição de vetores em vetores unitários

Para facilitar nossas contas, podemos decompor os vetores em vetores unitários em cada um dos planos apresentados. Vamos fazer para o $\mathbb{R}^2$, mas para o $\mathbb{R}^3$ ocorre de forma análoga. Tomemos um vetor no $\mathbb{R}^2$.

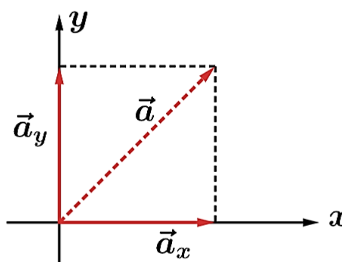


Figura 19: Vetor unitário decomposto no plano xy.

Por convenção, simbolizamos os vetores unitários com um "chapéu": $\hat{\imath}$ vetor unitário do eixo x e $\hat{\jmath}$ vetor unitário do eixo y.

Dessa forma, podemos dizer que $\hat{\imath} = \frac{\overrightarrow{a_x}}{|\overrightarrow{a_x}|}$, isto é, $\overrightarrow{a_x} = |\overrightarrow{a_x}|.\hat{\imath}$. Então, podemos escrever a projeção em um eixo como sendo o produto do vetor unitário daquele eixo pelo módulo da projeção.

Assim, temos que: $\vec{a} = (a_x.\hat{\imath}, a_y.\hat{\jmath})$

Caso o vetor $\vec{a}$ estivesse sendo trabalhado no R^3, teríamos que: $\vec{a} = a_x.\hat{\imath} + a_y.\hat{\jmath} + a_z.\hat{k} = (a_x, a_y, a_z)$. Caso o vetor não esteja na origem, podemos escrevê-lo da seguinte forma:

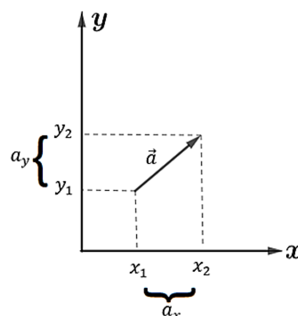


Figura 20: Representação de um vetor em função dos vetores unitários.

Assim, podemos escrever o vetor da seguinte forma:

$$\vec{a} = (x_2 - x_1).\hat{\imath} + (y_2 - y_1).\hat{\jmath} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

3.10. Subtração de vetores

Para efetuar a subtração de vetores basta pensarmos que a subtração é um caso particular da adição devido a existência do elemento oposto. Assim, podemos fazer:

$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + \left(-\vec{b}\right)$$

Em outras palavras para fazer a subtração basta somar o primeiro com o oposto do segundo. Geometricamente podemos ver a operação:

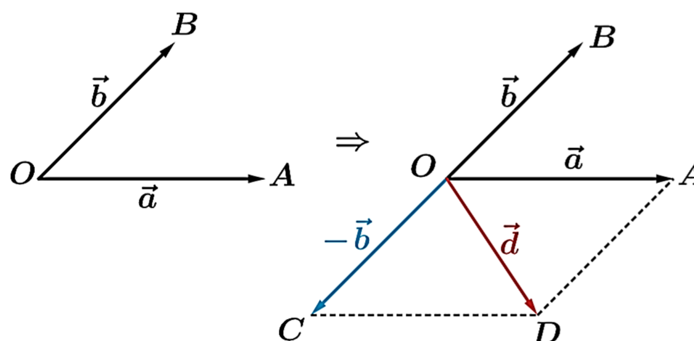


Figura 21: Figura ilustrativa do processo de subtração de vetores.

Analisando a figura acima, podemos criar um método para efetuar a subtração geometricamente. Inicialmente, colocamos os dois vetores em origem comum e traçamos o vetor diferença ligando a extremidade do segundo termo da subtração ($\vec{b}$) à extremidade do primeiro termo ($\vec{a}$), **sempre nessa ordem**, como indicado na figura abaixo:

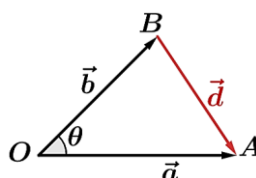


Figura 22: Vetor resultante da subtração.

Algebricamente, podemos determinar que o módulo do vetor diferença será obtido pela lei dos cossenos, desde que conhecido o ângulo entre os vetores:

$$d^2 = a^2 + b^2 - 2a.b.cos\theta \Rightarrow \boxed{d = \sqrt{a^2 + b^2 - 2.a.b.cos\theta}}$$

Note que existe uma **pequena diferença** no sinal da expressão do módulo do vetor diferença e a expressão do módulo do vetor soma. Este fato ocorre simplesmente por causa da geometria diferente dos dois problemas. Perceba que para o vetor diferença, o ângulo θ formado pelos dois vetores operando está olhando direto para o vetor diferença $\vec{d}$.

Quando o vetor é escrito em função das suas componentes, o vetor diferença é obtido de forma mais simples. Vamos mostrar para vetores no R^3:

$$\begin{cases} \vec{a} = (a_x, a_y, a_z) \\ \vec{b} = (b_x, b_y, b_z) \\ \vec{d} = (d_x, d_y, d_z) \end{cases} \Rightarrow \vec{d} = \vec{a} - \vec{b} \Rightarrow \begin{cases} d_x = a_x - b_x \\ d_y = a_y - b_y \\ d_z = a_z - b_z \end{cases}$$

Essas são as operações mais comuns na matemática dos vetores. Entretanto, existem duas operações, não tão trabalhadas em cursos comuns, mas elas têm grande importância na Física. Vamos definir os dois tipos de produtos entre vetores. Diversas grandezas físicas são definidas utilizando essas operações.



3.11. Produto escalar

Define-se produto escalar entre $\vec{a}$ e $\vec{b}$, denota-se por $\vec{a}.\vec{b}$ (lê-se “a escalar b”), a grandeza escalar cujo valor numérico é obtido multiplicando os módulos dos dois vetores operandos e o cosseno do ângulo formado entre eles. Isto é:

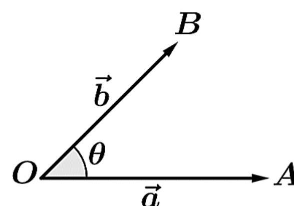


Figura 23. Produto escalar de dois vetores.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|.cos\theta$$

Primeiramente, é muito importante notar que essa operação resulta em um valor numérico. Fisicamente, esse produto entre duas grandezas vetoriais resulta em uma grandeza escalar. Alguns exemplos de grandezas escalares são: o trabalho de uma força, o potencial elétrico, fluxo do campo elétrico, fluxo do campo magnético etc.

Diante disso, precisamos saber trabalhar bem com produto escalar e, para isso, vamos trabalhar com algumas propriedades:



Propriedades do Produto Escalar

P1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ **(comutativa);**

P2) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ **(distributiva);**

P3) $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$**;**

P4) $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (k\vec{b}) = k(\vec{a} \cdot \vec{b})$**;**

P5) $|k\vec{a}| = |k| \cdot |\vec{a}|$**;**

P6) Desigualdade de Cauchy-Schwarz: $|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}||\vec{b}|$**. Essa recorre imediatamente da definição, pois,** $|cos\theta| \leq 1$**;**

P7) Desigualdade Triangular: $|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$**.**

Vamos fazer a demonstração dessa propriedade devido a sua utilidade:

Demonstração:

Inicialmente vamos fazer $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b})$ (pela propriedade P3). Em seguida, aplicando P4, temos que:

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{b}$$

Aplicando-se novamente a propriedade P3, temos que:

$$|\vec{a}+\vec{b}|^2 = \vec{a}\cdot\vec{a} + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2$$

Como $\vec{a}\cdot\vec{b} \leq |\vec{a}\cdot\vec{b}|$ (isto é, um número real é sempre menor ou igual ao seu módulo) e considerando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos que:

$$|\vec{a}+\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2 \leq |\vec{a}|^2 + 2|\vec{a}\cdot\vec{b}| + |\vec{b}|^2 = (|\vec{a}| + |\vec{b}|)^2$$

$$\therefore |\vec{a}+\vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$$

A igualdade nessa inequação verifica-se quando $|cos\theta| = 1$. Em outras palavras, quando os vetores forem paralelos.

Pela definição, é imediato que se o produto escalar de dois vetores ($\vec{a} \neq 0$ e $\vec{b} \neq 0$, com ângulo θ entre eles) é nulo, os vetores são perpendiculares:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \Rightarrow |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot cos\theta = 0 \;\therefore cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = 90°$$

É imediato também que se um dos vetores é nulo, o produto vetorial dele com qualquer outro será zero:

$$\vec{a}\cdot\vec{0} = \vec{0}\cdot\vec{a} = 0$$

Pode-se mostrar que para dois vetores escritos em função de suas componentes ($\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ e $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$), seu produto escalar será dado por:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x\cdot b_x + a_y\cdot b_y + a_z\cdot b_z$$

Isto é, o produto escalar será dado pelo produto das componentes do mesmo eixo. Dessa forma, pela definição, podemos calcular o ângulo entre dois vetores a partir do produto escalar:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot cos\theta \Rightarrow cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$$

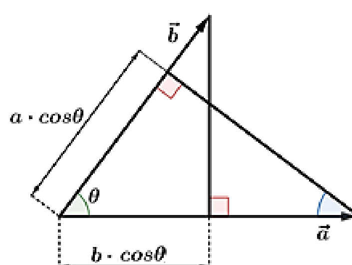


Figura 24: Representação geométrica dos vetores, para calcular o ângulo entre os vetores.

3.12. Produto vetorial

Define-se produto vetorial entre $\vec{a}$ e $\vec{b}$ - denota-se por $\vec{a}x\vec{b}$ (lê-se “a vetor b”) - a grandeza vetorial cujo resultado também é um vetor perpendicular ao plano dos vetores operandos.

Definição matemática: dados vetores $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ e $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ de $\mathbb{R}^3$, definimos produto vetorial entre $\vec{a}$ e $\vec{b}$ como:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Em que $\hat{\imath} = (1,0,0), \hat{\jmath} = (0,1,0)\ e\ \hat{k} = (0,0,1)$.

Uma boa forma para calcular esse determinante que você irá montar com as componentes de $\vec{a}$ e de $\vec{b}$ é aplicar o teorema de Laplace e deixar numa forma simplificada, conforme mostrada logo abaixo.

$$\begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} . \hat{\imath} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} . \hat{\jmath} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} . \hat{k}$$

Se você não é familiarizado ainda com o teorema de Laplace, fique à vontade para calcular o determinante da forma que for mais conveniente para você. Pode aplicar a Regra de Sarrus, por exemplo.

Quando calculamos o determinar, definimos o vetor que resultará do produto vetorial. Existe uma regra prática para determinar espacialmente a direção do vetor resultante do produto vetorial de dois vetores.

Para determinar o sentido do vetor resultante, utilizamos a regra da mão direita envolvente. Inicialmente, posiciona-se a mão direita na origem comum aos dois vetores e rotaciona-se no sentido do primeiro vetor ($\vec{a}$) para o segundo vetor ($\vec{b}$). Então, o polegar da mão direita mostrará a direção do vetor resultante do produto vetorial $\vec{a}x\vec{b}$, como na figura abaixo:



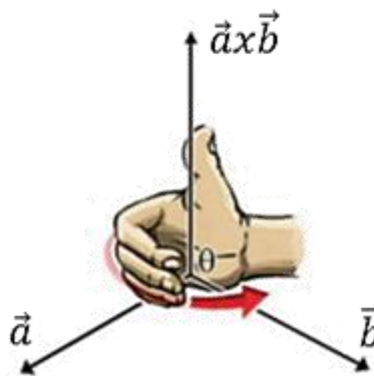


Figura 25: Regra da mão direita envolvente.

É fácil notar que para realizar a regra da mão direita deve-se preocupar com a ordem dos vetores, pois altera a direção do vetor resultante. Assim, podemos observar que: $\vec{a}x\vec{b} \neq \vec{b}x\vec{a}$ (na verdade: $\vec{a}x\vec{b} = -\vec{b}x\vec{a}$). Sendo assim, não podemos aplicar a propriedade comutativa para produtos vetoriais.

Para determinar o módulo do produto vetorial entre $\vec{a}\ e\ \vec{b}$ usamos a expressão:

$$\boxed{|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}|.|\vec{b}|sen\theta}$$

Ao longo do ano, estudaremos algumas grandezas físicas importantes que são definidas por um produto vetorial, tais como: velocidade angular, torque, força magnética que atua sobre uma carga puntiforme, entre outras.

Para melhorar nossos trabalhos com produto vetorial, vamos enumerar algumas propriedades:



Propriedades do Produto Vetorial

P1) O vetor $\vec{a} \times \vec{b}$ é perpendicular ao plano dos vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$;

P2) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$ (distributiva);

P3) $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$ (a prova é imediata uma vez que o ângulo entre os vetores operando é zero, e $sen(0°) = 0$);

P4) $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ **se, e somente se, os vetores** $\vec{a}$ **e** $\vec{b}$ **são paralelos, isto é,** $\vec{b} = n\vec{a}$**, onde** $n \in \mathbb{R}$**);**

P5) $(n\vec{a}) \times \vec{b} = n(\vec{a} \times \vec{b}), \forall\, n \in \mathbb{R}$**;**

P6) Dado um sistema de coordenadas xyz**, temos que:** $\hat{x} \times \hat{y} = \hat{z};\ \hat{y} \times \hat{z} = \hat{x};\ \hat{z} \times \hat{x} = \hat{y}$

Analisando geometricamente o modulo do produto vetorial entre $\vec{a}$ e $\vec{b}$, pode-se interpretar que ele é numericamente igual à área do paralelogramo formado pelos vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$, de acordo com a figura abaixo:

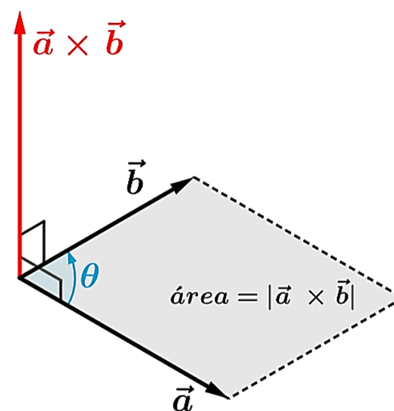


Figura 26: Representação geométrica do produto vetorial e a área do paralelogramo.

Perceba que o vetor $\vec{a} \times \vec{b}$ é perpendicular ao vetor $\vec{a}$ e ao vetor $\vec{b}$, pois ele é perpendicular ao plano formado por $\vec{a}$ e $\vec{b}$. Utilizaremos essa propriedade geométrica em força magnética, por exemplo.

Dessa forma, sempre é possível associar uma área qualquer a um vetor. Esse conceito será usado algumas vezes ao longo do curso.

Durante o ano, trabalharemos com muitas equações vetoriais. Uma equação vetorial sempre nos mostra mais de uma informação, pois, a um vetor sempre está associado módulo, direção e sentido. Por isso, sempre teremos cuidados para resolver as equações, utilizando os métodos aprendidos aqui.



1)

Determine a área do paralelogramo de vértices $(0,0,0), (1,2,3)\ e\ (2,1,1)$.

Comentários:

Para resolver esse problema, vamos calcular os dois vetores que definem os lados não paralelos do paralelogramo e calcular o produto vetorial desses dois vetores. Em seguida, calcularemos o módulo do vetor resultante, pois, sabemos que ele é o valor numérico da área do paralelogramo.

Cálculo dos vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$:

$$\vec{a} = (1-0, 2-0, 3-0) = (1, 2, 3)\ e\ \vec{b} = (2-0, 1-0, 1-0) = (2, 1, 1)$$

Cálculo do produto vetorial $\vec{a}x\vec{b}$:

$$\vec{a}x\vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} . \hat{\imath} - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} . \hat{\jmath} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} . \hat{k}$$

$$\Rightarrow \vec{a}x\vec{b} = -1\hat{\imath} + 5\hat{\jmath} - 3\hat{k}$$

Módulo de $\vec{a}x\vec{b}$:

$$\left|\vec{a}x\vec{b}\right| = \sqrt{(-1)^2 + 5^2 + (-3)^2} = \sqrt{1 + 25 + 9} = \sqrt{35}$$

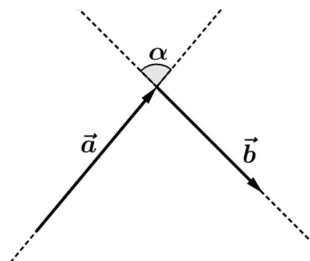
Dessa forma, a área do paralelogramo definido pelos pontos determinado é $\sqrt{35}$.



4. Lista de questões sobre vetores

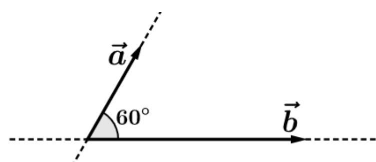
1.

Determine o módulo do vetor soma $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$, dado que $|\vec{a}| = 10$, $\left|\vec{b}\right| = 16$ e $cos\alpha = 0{,}6$.



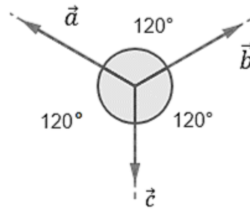
2.

Determine o módulo do vetor resultante sabendo que $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são representados logo abaixo. Dados $|\vec{a}| = 5$ e $\left|\vec{b}\right| = 10$.



3.

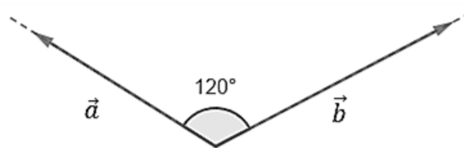
Determine o módulo da resultante $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$. Dados $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 10$.



4.

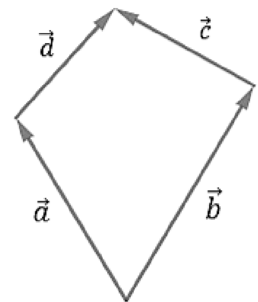
Para o conjunto de vetores da figura abaixo, determine o módulo do vetor diferença $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$.

Dados: $|\vec{a}| = 8$ e $|\vec{b}| = 10$.



5.

Qual das alternativas abaixo é uma relação verdadeira entre os vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ e $\vec{d}$.



a) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c} + \vec{d}$

b) $\vec{a} + \vec{c} = \vec{d} + \vec{b}$

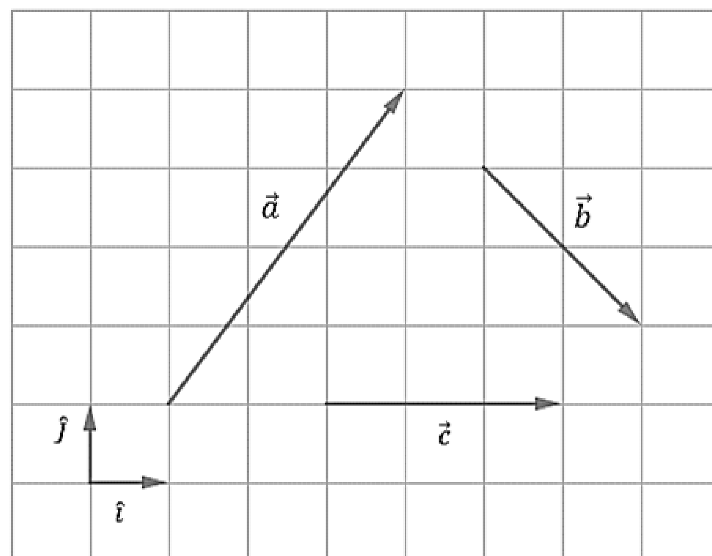
c) $\vec{a} + \vec{d} = \vec{c} + \vec{b}$

d) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$

e) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{d}$

6.

No gráfico da figura abaixo apresenta três vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$. Considere os vetores unitários $\hat{\imath}$ e $\hat{\jmath}$.



Considere as expressões:

(I) $\vec{a} = 3\hat{\imath} + 4\hat{\jmath}$

(II) $\vec{b} = 2\hat{\imath} + 2\hat{\jmath}$

(III) $\vec{c} = 3\hat{\jmath}$

Podemos afirmar que:

a) apenas (I) está correta.

b) apenas (II) está correta.

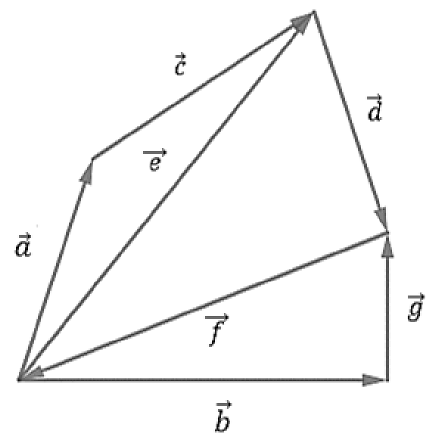
c) apenas (III) está correta.

d) (I) e (II) estão corretas.

e) todas estão corretas.

7.

Dado o conjunto de vetores, como ilustrado na figura abaixo, marque verdadeira para as equações vetoriais corretas e F para as falsas.



a) $\vec{a} + \vec{c} = \vec{e}$

b) $\vec{e} + \vec{d} = \vec{g} + \vec{b}$

c) $\vec{a} + \vec{c} + \vec{e} = \vec{0}$

d) $\vec{a} + \vec{c} - \vec{e} + \vec{b} + \vec{g} + \vec{f} = \vec{0}$

e) $\vec{e} + \vec{d} - \vec{g} + \vec{b} = \vec{0}$

8.

Dois vetores ortogonais, isto é, são perpendiculares entre si, um de módulo igual a 18 e outro de módulo 24, então, o vetor soma terá módulos igual a:

a) 20

b) 25

c) 28

d) 30

e) 32

9.

Dentre as alternativas abaixo, assinale as alternativas erradas. Considere $n \in \mathbb{R}_*$ e o vetor não-nulo $\vec{a}$.

a) a direção de $\vec{b} = n.\vec{a}$ tem sempre a mesma direção de $\vec{a}$.

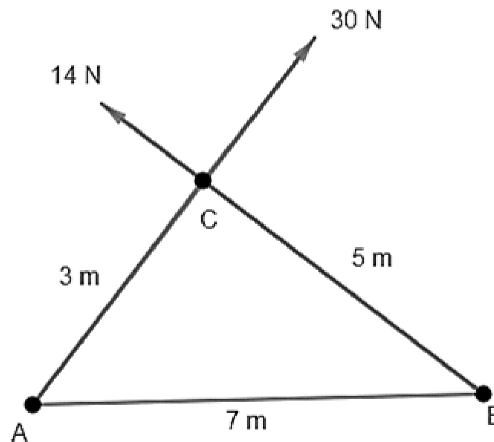
b) se $n < 0$ então a direção de $\vec{b} = n.\vec{a}$ é diferente da direção de $\vec{a}$.

c) independente do sinal de n, o vetor $\vec{b} = n.\vec{a}$ tem sempre o mesmo sentido de $\vec{a}$.

d) se $n > 0$ o vetor $\vec{b} = n.\vec{a}$ tem módulo maior que o módulo de $\vec{a}$.

10.

Considere duas cargas elétricas positivas posicionadas nos vértices A e B. No vértice C, coloca-se uma terceira carga de tal forma que surgem forças repulsivas na carga do vértice, conforme a figura abaixo. Determine o módulo da força resultante no vértice C.



11.

Dados os vetores: $\vec{a} = 2\hat{\imath} - 4\hat{\jmath} + 5\hat{k}$ e $\vec{b} = 2\hat{\imath} + \hat{\jmath} - 3\hat{k}$. Determine:

a) $\vec{a} + \vec{b}$ b) $\vec{a} - \vec{b}$ c) $-\vec{a} + \vec{b}$

12.

Considere o problema anterior e determine o vetor $3\vec{a} - \vec{b}$.

13.

Considere três pontos no espaço dado por: $A(3,3,6)$; $B(2,1,3)$;$C(2,2,3)$. Definimos o vetor $\vec{a}$ com origem em A e extremidade em C, e o vetor $\vec{b}$, com origem em B e extremidade em A. Determine:

a) $\vec{a}.\vec{b}$ b) $\vec{a}\ x\ \vec{b}$

14.

Dado o vetor $\vec{a} = (n, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, determine n para que o vetor seja unitário.

15.

Considere o vetor $\vec{a} = (3, -1, \sqrt{6})$. Determine o vetor paralelo a $\vec{a}$ com as seguintes características:

a) sentido contrário ao de $\vec{a}$ e 2 vezes o módulo de $\vec{a}$.

b) sentido contrário ao de $\vec{a}$ e módulo 4.

c) mesmo sentido e módulo igual a 12.

16.

Obtenha o vetor $\vec{b}$, sabendo que $|\vec{b}| = 5$, $\vec{b}$ é ortogonal ao eixo OX, $\vec{a}\,.\,\vec{b} = 6$ e $\vec{a} = \hat{\imath} + 2\hat{\jmath}$.

17.

Calcule o valor de α para que os vetores $\vec{a} + \vec{b}$ seja ortogonal ao vetor $\vec{c} - \vec{a}$. Dado que: $\vec{a} = (2,1,\alpha)$, $\vec{b} = (\alpha + 2, -5,2)$ e $\vec{c} = (2\alpha, 8, \alpha)$.

18.

Obtenha o vetor $\vec{x}$ tal que: $\vec{x}\,.\,(1,4,-3) = -7$ e $\vec{x} \times (4,-2,1) = (3,5,-2)$.

19.

Encontre um vetor que seja simultaneamente ortogonal aos vetores $\vec{a} + 2\vec{b}$ e $\vec{b} - \vec{a}$, onde $\vec{a} = (-3,2,0)$ e $\vec{b} = (0, -1, -2)$.

20.

Determine o valor de m para que o paralelogramo definido por $\vec{a} = (m, -3,1)$ e $\vec{b} = (1, -2,2)$ tenha área igual $\sqrt{26}$.

21. (ITA – 1991)

Considere a Terra como sendo uma esfera de raio R e massa M, uniformemente distribuída. Um satélite artificial descreve uma órbita circular a uma altura h da superfície da Terra, onde a aceleração gravitacional (sobre a órbita) é g. Em termos de algarismos significativos, o quadrado da velocidade do satélite é mais bem representado por:

a) $16{,}81 \cdot 10^6\ (km/h)^2$

b) $3{,}62 \cdot 10^{32}\ (km/h)^2$

c) $6{,}05 \cdot 10^7\ (m/s)^2$

d) $6{,}0517 \cdot 10^7\ (m/s)^2$

e) Nenhum dos valores apresentados é adequado.

Dados: $R = 6{,}378\ .\ 10^6\ m$; $M = 5{,}983 \cdot 10^{24}\ kg$; $h = 2{,}00 \cdot 10^5\ m$ e $g = 9{,}2\ m/s^2$

Note e adote: $V^2 = g \cdot (R + h)$

22. (ITA-2002)

A massa inercial mede a dificuldade em se alterar o estado de movimento de uma partícula. Analogamente, o momento de inércia de massa mede a dificuldade em se alterar o estado de rotação de um corpo rígido. No caso de uma esfera, o momento de inércia em torno de um eixo que passa pelo seu centro é dado por $I = \frac{2}{5}MR^2$, em que M é a massa da esfera e R seu raio. Para uma esfera de massa $M = 25{,}0\ kg$ e raio $R = 15{,}0\ cm$, a alternativa que melhor representa o seu momento de inércia é

a) $22{,}50 \cdot 10^2\ kg \cdot m^2$
b) $2{,}25\ kg \cdot m^2$
c) $0{,}225\ kg \cdot m^2$
d) $0{,}22\ kg \cdot m^2$
e) $22{,}00\ kg \cdot m^2$

23. (ITA – 2007)

Sobre um corpo de $2{,}5kg$ de massa atuam, em sentidos opostos de uma mesma direção, duas forças de intensidades $150{,}40N$ e $50{,}40N$, respectivamente. A opção que oferece o módulo da aceleração resultante com o número correto de algarismos significativos é

a) $40{,}00\ m/s^2$
b) $40\ m/s^2$
c) $0{,}4 \cdot\ 10^2 m/s^2$
d) $40{,}0\ m/s^2$
e) $40{,}000\ m/s^2$

24. (UNICAMP-94)

Impressionado com a beleza da jovem modelo (1,70 m de altura e 55 kg), um escultor de praia fez sua (dela) estátua de areia do mesmo tamanho que o modelo. Adotando valores razoáveis para os dados que faltam no enunciado:

a) calcule o volume da estátua (em litros);

b) estime a ordem de grandeza do número de grãos de areia que foram usados na escultura

25. (UERJ)

O acelerador de íons pesados relativísticos de Brookhaven (Estados Unidos) foi inaugurado com a colisão entre dois núcleos de ouro, liberando uma energia de 10 trilhões de elétrons-volt. Os cientistas esperam, em breve, elevar a energia a 40 trilhões de elétrons-volt, para simular as condições do Universo durante os primeiros microssegundos após o Big Bang. (Ciência Hoje, setembro de 2000). Sabendo que 1 elétron-volt é igual a $1{,}6.10^{-19}\ joules$, a ordem de grandeza da energia, em joules, que se espera atingir em breve, com o acelerador de Brookhaven, é:

a) 10^{-8} b) 10^{-7} c) 10^{-6} d) 10^{-5}

26. (Inédita - Prof. Toni Burgatto)

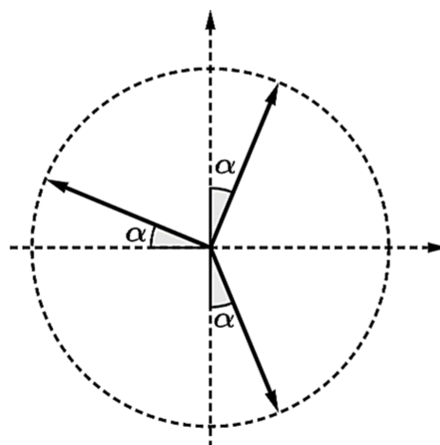
Dois vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ de módulos constantes estão dispostos em um plano. Sabe-se que o maior e menor valor da resultante desses vetores é 32 u e 8 u, respectivamente. O módulo de $\vec{A}-\vec{B}$ quando $\vec{A}$ e $\vec{B}$ formam um ângulo de 60° é igual:

a) $\sqrt{19}\ u$ b) $2\sqrt{19}\ u$ c) $3\sqrt{19}\ u$

d) $4\sqrt{19}\ u$ e) $5\sqrt{19}\ u$

27. (Inédita - Prof. Toni Burgatto)

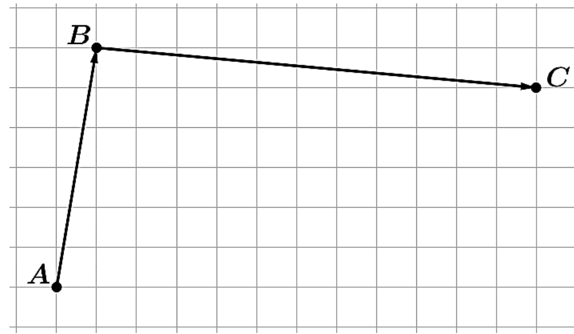
Na figura abaixo, o valor de α para que o vetor resultante seja mínimo é de:



a) 22,5° b) 30° c) 45° d) 60° e) 75°

28. (Inédita - Prof. Toni Burgatto)

Ao realizar uma caminha em um parque, um jovem se deslocou de A para B, seguindo de B para C, conforme figura abaixo.



Dessa forma, o vetor deslocamento do jovem tem intensidade igual a:

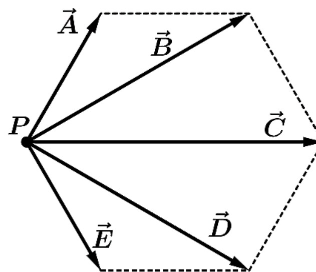
Considere que cada quadradinho tenha um tamanho igual a 1 metro.

a) $13\ m$ b) $3\sqrt{5}\ m$ c) $6\sqrt{2}\ m$ d) $10\ m$ e) $4\sqrt{3}\ m$

29. (Inédita - Prof. Toni Burgatto)

No ponto P são aplicadas cincos forças, sendo que $|\vec{C}| = 2\ N$. Dessa forma, a intensidade da força resultante no ponto P é igual a:

Considere que o hexágono é regular.



(A) 2 N (B) 4 N (C) 6 N (D) $3\sqrt{3}$ N (E) $2\sqrt{5}$ N

30. (Inédita - Prof. Toni Burgatto)

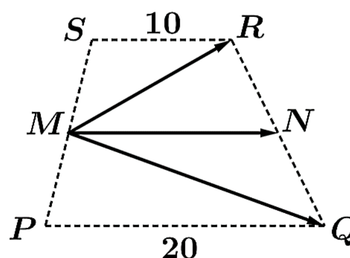
Dois vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$, de mesmo módulo, formam um ângulo agudo θ. Dessa forma, a razão entre os módulos de $\vec{A}+\vec{B}$ e $\vec{A}-\vec{B}$ é igual a:

a) $tg\left(\frac{\theta}{2}\right)$ b) $cotg\left(\frac{\theta}{2}\right)$ c) $sen\left(\frac{\theta}{2}\right)$

d) $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ e) $tg(2\theta)$

31. (Inédita – Prof. Toni Burgatto)

Se M e N são pontos médios, o módulo do vetor resultante é de:

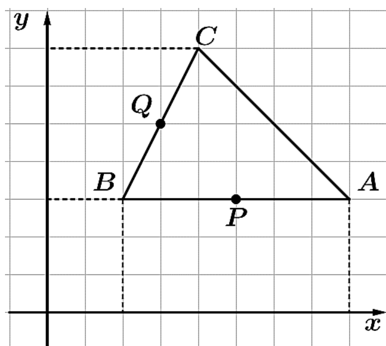


Considere que PQRS é um trapézio, com $SR = 10$ e $PQ = 20$.

a) 25 b) 30 c) 45 d) 55 e) 60

32. (Inédita – Prof. Toni Burgatto)

Em um plano cartesiano, constrói-se o triângulo ABC, conforme figura abaixo.



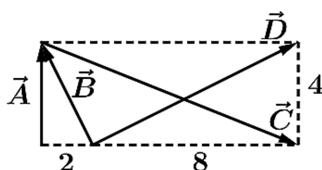
Se P e Q são pontos médios de AB e BC, então o vetor $\overrightarrow{PQ}$ é dado por:

a) $(2, -2)$ b) $(-2,2)$ c) $(3,5)$

d) $(-3,5)$ e) $(-5,5)$

33. (Inédita – Prof. Toni Burgatto)

Seja $\vec{R}$ o vetor resultante definido por $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D}$. O módulo de valor de $\vec{R} - 2\vec{D} + \vec{A}$ é igual a:



(A) 0 (B) 2 (C) 4 (D) 6 (E) 8

34. (Inédita – Prof. Toni Burgatto)

Tomando dois vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ podemos gerar dois novos vetores, como na figura abaixo:



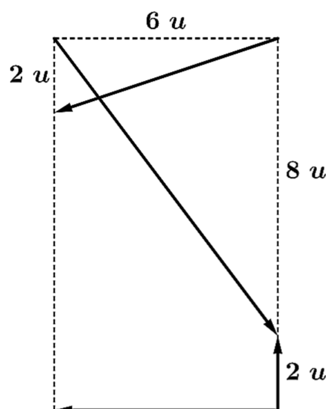
Se $|4\vec{A} - \vec{B}| = 10\ u$ e $|\vec{A} + 2\vec{B}| = 10\sqrt{3}\ u$, então $|7\vec{A} - 4\vec{B}|$ é igual a:

a) $10\sqrt{3}\ u$ b) $20\sqrt{3}\ u$ c) $10\sqrt{13}\ u$

d) $5\sqrt{3}\ u$ e) $3\sqrt{10}\ u$

35. (Inédita – Prof. Toni Burgatto)

Na figura abaixo são representados 4 vetores em um retângulo. Podemos dizer que o módulo do vetor resultante é de:



a) 2 u b) 4 u c) 6 u d) 8 u e) 10 u

36. (Inédita – Prof. Toni Burgatto)

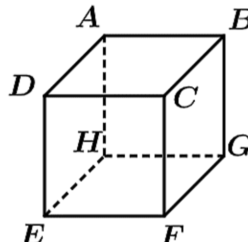
Dois vetores em um mesmo plano tem módulos constante. Sabe-se que o maior e o menor valor de resultante valem 30 u e 6 u, respectivamente. Qual o modulo do vetor diferença quando os vetores formarem um ângulo de 120°?

a) $2\sqrt{19}\,u$ b) $3\sqrt{15}\,u$ c) $6\sqrt{19}\,u$

d) $4\sqrt{13}\,u$ e) $7\sqrt{11}\,u$

37. (Inédita – Prof. Toni Burgatto)

Considere um cubo de lado a, onde se estabelece as seguintes somas vetoriais.



I. $\overrightarrow{FB} + \overrightarrow{CG} = 2\overrightarrow{FG}$

II. $\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{DG} = 2\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG}\right)$

III. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AE} = 2\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AH}\right)$

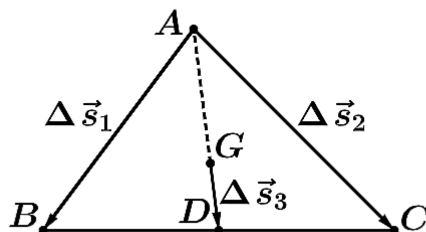
Estão corretas:

(A) apenas I. (B) apenas II. (C) apenas I e II.

(D) apenas II e III. (E) todas as afirmativas.

38. (Inédita – Prof. Toni Burgatto)

Três pessoas caminham em uma praça triangular ABC, conforme figura abaixo. Uma pessoa parte de A em direção a B e a outra de A para C. Uma terceira pessoa parte do baricentro em direção ao ponto médio de BC. Dessa forma, a relação entre os deslocamentos das pessoas é dada por:

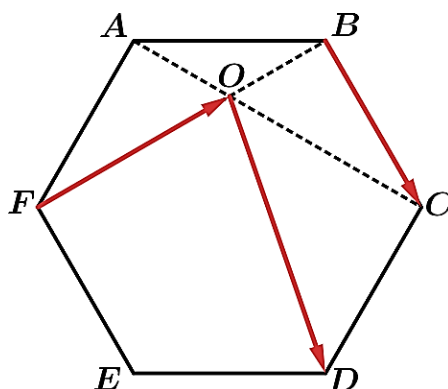


a) $\frac{\Delta\vec{s}_3}{3} = \frac{\Delta\vec{s}_1+\Delta\vec{s}_2}{2}$ b) $3\Delta\vec{s}_3 = \Delta\vec{s}_1 + \Delta\vec{s}_2$

c) $6\Delta\vec{s}_3 = \Delta\vec{s}_1 + \Delta\vec{s}_2$ d) $\frac{\Delta\vec{s}_3}{2} = \frac{\Delta\vec{s}_1+\Delta\vec{s}_2}{3}$

39. (Inédita – Prof. Toni Burgatto)

As forças que atuam em um corpo foram diagramada em um hexágono de lado L, como na figura abaixo. Dessa forma, o modulo de $\overrightarrow{FO} - \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{BC}$.



a) $\frac{2\sqrt{3}}{3}L$ b) $\sqrt{3}L$ c) $\frac{4\sqrt{3}}{3}L$ d) $\frac{5\sqrt{3}}{3}L$

GABARITO



5. Gabarito lista de vetores sem comentários

1. $2\sqrt{41}$
2. $5\sqrt{7}$
3. $\vec{0}$
4. $2\sqrt{61}$
5. C
6. A
7. VVFVF
8. D
9. B, C e D
10. $26\ N$
11. $a)\ 4\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + 2\hat{k}$, $b) - 5\hat{\jmath} + 8\hat{k}$, $c)\ 5\hat{\jmath} - 8\hat{k}$
12. $4\hat{\imath} - 13\hat{\jmath} + 18\hat{k}$
13. a) -12 b) $\vec{a} \times \vec{b} = (3,0,-1)$

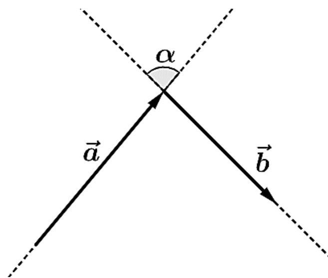
14. $n = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$
15. a) $\left(-6,2,-2\sqrt{6}\right)$ b) $\left(-3,1,-\sqrt{6}\right)$
    c)$\left(9,-3,3\sqrt{6}\right)$
16. $\vec{b} = (0,3,4)$ ou $\vec{b} = (0,3 - 4)$
17. $\alpha = 3$ ou $\alpha = -6$
18. $\vec{x} = (3,-1,2)$
19. $(-12,-18,9)$
20. $m = 0\ ou\ m = 2$
21. C
22. C
23. B
24. Ver comentários.
25. D
26. D
27. A
28. A
29. C
30. B
31. C
32. B
33. C
34. C
35. E
36. C
37. E
38. C
39. D



6. Lista de vetores comentada

1.

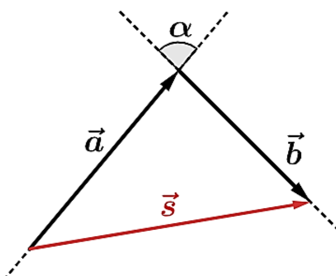
Determine o módulo do vetor soma $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$, dado que $|\vec{a}| = 10$, $|\vec{b}| = 16$ e $cos\alpha = 0{,}6$.



Comentários:

Perceba que os vetores já estão colocados conforme a regra do polígono. Então, os vetores não estão com origem em comum e não podemos aplicar nossa lei dos cossenos da Física. Pela regra do polígono, o vetor resultante é dado por:

De início, determinaremos o vetor soma geometricamente, fechando o triângulo, de acordo com a regra do polígono. Em seguida utilizaremos a lei dos cossenos para determinar o modulo de $\vec{s}$:



De acordo com a lei dos cossenos, podemos escrever que:

$$|\vec{s}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot cos\alpha$$

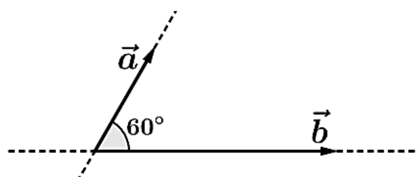
$$\Rightarrow |\vec{s}|^2 = 10^2 + 16^2 - 2 \cdot 10 \cdot 16 \cdot 0{,}6$$

$$\Rightarrow |\vec{s}| = \sqrt{164} \Rightarrow \boxed{|\vec{s}| = 2\sqrt{41}}$$

Gabarito: $|\vec{s}| = 2\sqrt{41}$

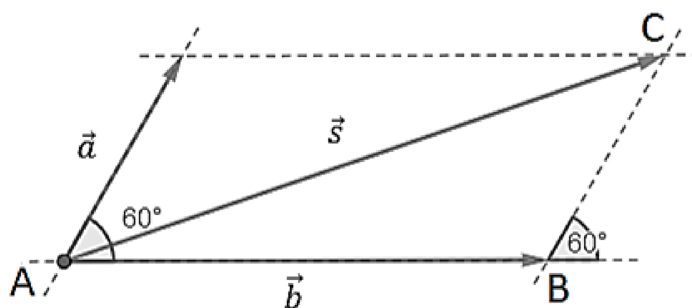
2.

Determine o módulo do vetor resultante sabendo que $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são representados logo abaixo. Dados $|\vec{a}| = 5$ e $|\vec{b}| = 10$.



Comentários:

Inicialmente, encontraremos o vetor resultante $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$ pela regra do paralelogramo, e determinaremos seu módulo utilizando a lei dos cossenos:



Aplicando a lei dos cossenos no triângulo ABC:

$$|\vec{s}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}|.|\vec{b}|.\underbrace{\cos(180° - 60°)}_{=\cos(120°)=\frac{1}{2}}$$

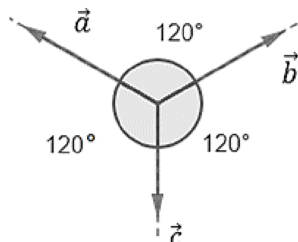
$$\Rightarrow |\vec{s}|^2 = 5^2 + 10^2 + 2.5.10.\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow |\vec{s}| = \sqrt{175} \Rightarrow \boxed{|\vec{s}| = 5\sqrt{7}}$$

Gabarito: $|\vec{s}| = 5\sqrt{7}$

3.

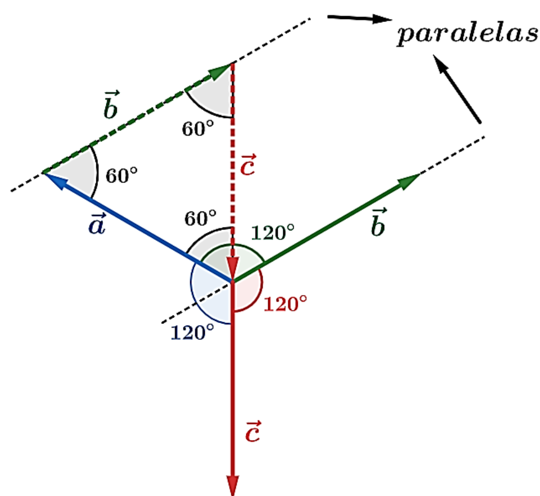
Determine o módulo da resultante $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$. Dados $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 10$.



Comentários:

Primeiramente, ao somar os vetores $\vec{a} + \vec{b}$, verificamos que a soma é igual ao vetor $-\vec{c}$, devido a geometria do problema, portanto, o vetor resultante será o vetor nulo ($\vec{s} = \vec{0}$).

Se nós aplicarmos a regra do polígono, apenas transladando os vetores, veremos que eles formam um triângulo equilátero fechado, em que a origem do primeira vai coincidir com a extremidade do último, ou seja, um vetor nulo.

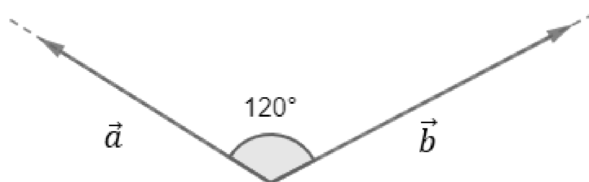


Gabarito: $\vec{s} = \vec{0}$

4.

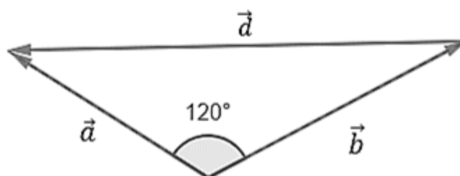
Para o conjunto de vetores da figura abaixo, determine o módulo do vetor diferença $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$.

Dados: $|\vec{a}| = 8$ e $|\vec{b}| = 10$.



Comentários:

Para começar o problema, vamos determinar o vetor diferença geometricamente, ligando a extremidade do segundo vetor a extremidade do primeiro. Em seguida, calcularemos o módulo.



Lei dos cossenos para o triângulo formado pelos vetores:

$$|\vec{d}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos(120°)$$

$$|\vec{d}|^2 = 8^2 + 10^2 - 2 \cdot 8 \cdot 10 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$|\vec{d}|^2 = 64 + 100 + 80$$

$$|\vec{d}|^2 = 244$$

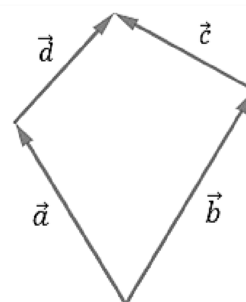
$$|\vec{d}| = \sqrt{244} = \sqrt{4 \cdot 61}$$

$$\therefore \boxed{|\vec{d}| = 2\sqrt{61}}$$

Gabarito: $|\vec{d}| = 2\sqrt{61}$

5.

Qual das alternativas abaixo é uma relação verdadeira entre os vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ e $\vec{d}$.



a) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c} + \vec{d}$

b) $\vec{a} + \vec{c} = \vec{d} + \vec{b}$

c) $\vec{a} + \vec{d} = \vec{c} + \vec{b}$

d) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$

e) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{d}$

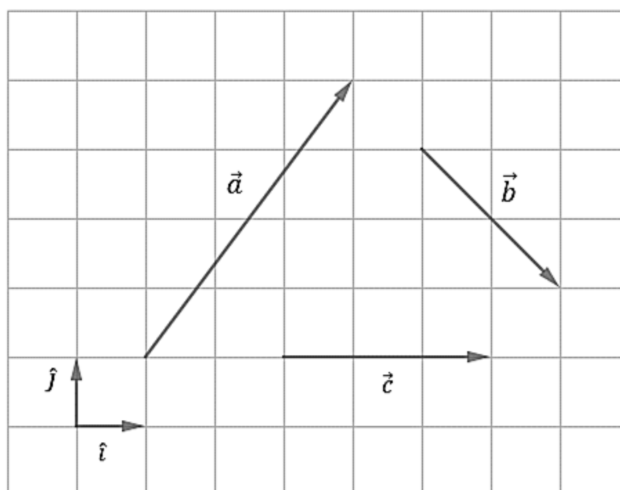
Comentários:

Observando a figura em questão, ao fazermos o vetor $\vec{a} + \vec{d}$, vemos que ele é igual ao vetor $\vec{c} + \vec{b}$.

Gabarito: C

6.

No gráfico da figura abaixo apresenta três vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$. Considere os vetores unitários $\hat{\imath}$ e $\hat{\jmath}$.



Considere as expressões:

(I) $\vec{a} = 3\hat{\imath} + 4\hat{\jmath}$

(II) $\vec{b} = 2\hat{\imath} + 2\hat{\jmath}$

(III) $\vec{c} = 3\hat{\jmath}$

Podemos afirmar que:

a) apenas (I) está correta.

b) apenas (II) está correta.

c) apenas (III) está correta.

d) (I) e (II) estão corretas.

e) todas estão corretas.

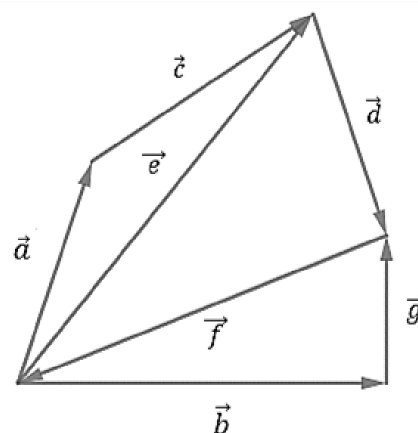
Comentários:

Ao escrever a representação de cada vetor, obtemos os seguintes vetores: $\vec{a} = 3\hat{\imath} + 4\hat{\jmath}$, $\vec{b} = 2\hat{\imath} - 2\hat{\jmath}$ e $\vec{c} = 3\hat{\imath}$.

Gabarito: A

7.

Dado o conjunto de vetores, como ilustrado na figura abaixo, marque verdadeira para as equações vetoriais corretas e F para as falsas.



a) $\vec{a} + \vec{c} = \vec{e}$

b) $\vec{e} + \vec{d} = \vec{g} + \vec{b}$

c) $\vec{a} + \vec{c} + \vec{e} = \vec{0}$

d) $\vec{a} + \vec{c} - \vec{e} + \vec{b} + \vec{g} + \vec{f} = \vec{0}$

e) $\vec{e} + \vec{d} - \vec{g} + \vec{b} = \vec{0}$

Comentários:

Para cada afirmação, devemos verificar as relações entre os vetores, utilizando a regra do polígono:



a) De fato, ao somarmos os vetores $\vec{a} + \vec{c}$ verificamos que ele é igual ao vetor $\vec{e}$, portanto a alternativa é verdadeira;

b) Somando $\vec{e} + \vec{d}$, verificamos que ele é $-\vec{f}$, mesmo resultado obtido ao fazermos $\vec{b} + \vec{g}$, portanto, a alternativa é verdadeira;

c) Do item A, temos que $\vec{a} + \vec{c} = \vec{e}$. Portanto, $\vec{a} + \vec{c} + \vec{e} = 2\vec{e} \neq \vec{0}$, portanto, a alternativa é falsa;

d) Do item A, temos novamente que $\vec{a} + \vec{c} = \vec{e}$. Portanto, $\vec{a} + \vec{c} - \vec{e} = \vec{0}$ e da figura vemos claramente que $\vec{b}$, $\vec{g}$ e $\vec{f}$ fecham um triângulo, respeitada a regra do polígono. Então, a alternativa é verdadeira;

e) Olhando a figura vemos que $\vec{e} + \vec{d} = -\vec{f}$ e $\vec{g} + \vec{b} = -f \Rightarrow \vec{g} + \vec{b} = \vec{e} + \vec{d} \Rightarrow \vec{b} = \vec{e} + \vec{d} - \vec{g}$. Portanto, $\vec{e} + \vec{d} - \vec{g} + \vec{b} = \vec{0} \Rightarrow \vec{b} + \vec{b} = \vec{0} \Rightarrow 2\vec{b} = \vec{0}$. Logo a alternativa é falsa.

Gabarito: VVFVF.

8.

Dois vetores ortogonais, isto é, são perpendiculares entre si, um de módulo igual a 18 e outro de módulo 24, então, o vetor soma terá módulos igual a:

a) 20 b) 25 c) 28 d) 30 e) 32

Comentários:

Dado que os vetores são ortogonais, o ângulo entre eles é 90° e sabemos que o vetor resultante é a hipotenusa definida pelos catetos cujos tamanhos são os módulos dos vetores dados.

Assim, é valido o teorema de Pitágoras. Entretanto, como podemos ver os catetos são proporcionais aos catetos do triângulo pitagórico 3,4,5. Se fizermos a semelhança veremos que os lados foram multiplicados por 6. Logo a hipotenusa também será multiplicada por 6, portanto, o módulo do vetor soma é $5x6 = 30$.

Gabarito: D

9.

Dentre as alternativas abaixo, assinale as alternativas erradas. Considere $n \in \mathbb{R}_*$ e o vetor não-nulo $\vec{a}$.

a) a direção de $\vec{b} = n.\vec{a}$ tem sempre a mesma direção de $\vec{a}$.

b) se $n < 0$ então a direção de $\vec{b} = n.\vec{a}$ é diferente da direção de $\vec{a}$.

c) independente do sinal de n, o vetor $\vec{b} = n.\vec{a}$ tem sempre o mesmo sentido de $\vec{a}$.

d) se $n > 0$ o vetor $\vec{b} = n.\vec{a}$ tem módulo maior que o módulo de $\vec{a}$.

Comentários:

A letra a) está correta, pois, ao multiplicar um vetor por um número escalar não alteramos a direção do vetor, podemos apenas alterar o sentido do vetor. Dessa forma, já podemos observar que a letra b) está errada.

Como vimos na teoria, ao multiplicar um vetor por um número escalar negativo, trocamos o sentido do vetor, assim, a letra c também está errada. Para a alternativa d) devemos lembrar que aumentamos o módulo de um vetor somente quando multiplicamos o vetor por um escalar quando multiplicamos por um escalar cujo módulo é maior que 1.

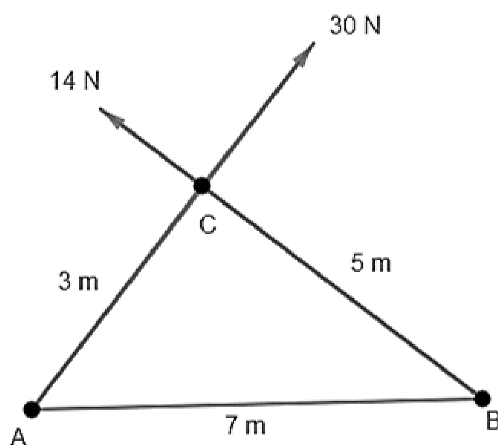
Como vemos matematicamente:

$$|\vec{b}| > |\vec{a}| \Rightarrow |n.\vec{a}| > |\vec{a}| \Rightarrow |n|.|\vec{a}| > |\vec{a}| \Rightarrow |\vec{a}|(|n|-1) > 0 \Rightarrow |n| > 1$$

Gabarito: B, C e D.

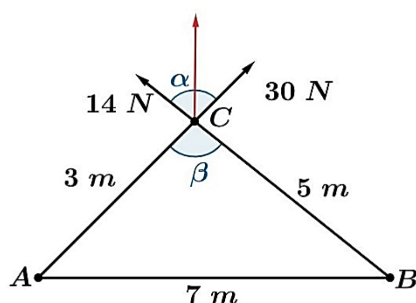
10.

Considere duas cargas elétricas positivas posicionadas nos vértices A e B. No vértice C, coloca-se uma terceira carga de tal forma que surgem forças repulsivas na carga do vértice, conforme a figura abaixo. Determine o módulo da força resultante no vértice C.



Comentários:

Primeiramente, utilizaremos a lei dos cossenos para calcular o valor do cosseno do vértice:



$$7^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cos(\beta)$$

$$\Rightarrow \cos(\beta) = -\frac{1}{2}$$

Mas $\alpha = \beta$, pois eles são opostos pelo vértice. Diante disso, podemos usar a expressão para o cálculo do vetor soma, pois os vetores possuem origem em comum e o ângulo formado por eles é α. Logo:

$$s^2 = 14^2 + 30^2 + 2 \cdot 14 \cdot 30 \cdot \cos(\alpha)$$



$$s^2 = 1096 + 2 \cdot 14 \cdot 30 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$s^2 = 1096 - 420$$

$$s^2 = 676$$

$$\therefore \boxed{s = 26\ N}$$

Gabarito: $s = 26\ N$

11.

Dados os vetores: $\vec{a} = 2\hat{\imath} - 4\hat{\jmath} + 5\hat{k}$ e $\vec{b} = 2\hat{\imath} + \hat{\jmath} - 3\hat{k}$. Determine:

a) $\vec{a} + \vec{b}$ b) $\vec{a} - \vec{b}$ c) $-\vec{a} + \vec{b}$

Comentários:

a) $\vec{a} + \vec{b} = (2+2)\hat{\imath} + (-4+1)\hat{\jmath} + (5-3)\hat{k} = 4\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + 2\hat{k}$

b) $\vec{a} - \vec{b} = 2\hat{\imath} - 4\hat{\jmath} + 5\hat{k} - (2\hat{\imath} + \hat{\jmath} - 3\hat{k}) = (2-2)\hat{\imath} + (-4-1)\hat{\jmath} + (5+3)\hat{k} = -5\hat{\jmath} + 8\hat{k}$

c) $-\vec{a} + \vec{b} = -(2\hat{\imath} - 4\hat{\jmath} + 5\hat{k}) + 2\hat{\imath} + \hat{\jmath} - 3\hat{k} = (4+1)\hat{\jmath} + (-5-3)\hat{k} = 5\hat{\jmath} - 8\hat{k}$

Repare que $\vec{a} - \vec{b} = -(-\vec{a} + \vec{b})$, conforme visto na teoria.

Gabarito: $a)\ 4\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + 2\hat{k},\ b) - 5\hat{\jmath} + 8\hat{k},\ c)\ 5\hat{\jmath} - 8\hat{k}$

12.

Considere o problema anterior e determine o vetor $3\vec{a} - \vec{b}$.

Comentários:

Inicialmente calculamos as partes.

$$3\vec{a} = 3(2\hat{\imath} - 4\hat{\jmath} + 5\hat{k}) = 6\hat{\imath} - 12\hat{\jmath} + 15\hat{k}$$

Finalmente:

$$3\vec{a} - \vec{b} = 6\hat{\imath} - 12\hat{\jmath} + 15\hat{k} - (2\hat{\imath} + \hat{\jmath} - 3\hat{k}) = 4\hat{\imath} - 13\hat{\jmath} + 18\hat{k}$$

Gabarito: $4\hat{\imath} - 13\hat{\jmath} + 18\hat{k}$

13.

Considere três pontos no espaço dado por: $A(3,3,6)$; $B(2,1,3)$;$C(2,2,3)$. Definimos o vetor $\vec{a}$ com origem em A e extremidade em C, e o vetor $\vec{b}$, com origem em B e extremidade em A. Determine:

a) $\vec{a}.\vec{b}$ b) $\vec{a}\ x\ \vec{b}$

Comentários:

Inicialmente, vamos calcular os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$. Para calcular o vetor $\vec{a}$ basta fazer a diferença entre posição da extremidade e a posição da origem (em cálculo vetorial no ITA, todas as definições matemáticas serão trabalhadas, mas para o nosso curso vamos nos contentar apenas mostrar como trabalhar com os vetores).

Assim, temos que:

$$\vec{a} = (2,2,3) - (3,3,6) = (-1,-1,-3) \text{ e } \vec{b} = (3,3,6) - (2,1,3) = (1,2,3)$$

Então:

a) $\vec{a}.\vec{b} = (-1).(1) + (-1).(2) + (-3).(3) = -1 - 2 - 9 = -12$

b) $\vec{a}\,x\,\vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ -1 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}\hat{\imath} - \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}\hat{\jmath} + \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\hat{k}$

$$\Rightarrow \vec{a}\,x\,\vec{b} = 3\hat{\imath} - \hat{k} \text{ ou ainda } \vec{a}\,x\,\vec{b} = (3,0,-1)$$

Gabarito: a) -12 b) $\vec{a}\,x\,\vec{b} = (3,0,-1)$

14.

Dado o vetor $\vec{a} = (n, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, determine n para que o vetor seja unitário.

Comentários:

Se o vetor é unitário, então seu módulo é igual a 1. Portanto:

$$|\vec{a}| = \sqrt{n^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = 1$$

$$\Rightarrow n^2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1^2$$

$$\Rightarrow n^2 = \frac{4-1-1}{4}$$

$$\Rightarrow n^2 = \frac{2}{4}$$

$$\therefore n = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Gabarito: $n = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

15.

Considere o vetor $\vec{a} = (3, -1, \sqrt{6})$. Determine o vetor paralelo a $\vec{a}$ com as seguintes características:

a) sentido contrário ao de $\vec{a}$ e 2 vezes o módulo de $\vec{a}$.

b) sentido contrário ao de $\vec{a}$ e módulo 4.

c) mesmo sentido e módulo igual a 12.

Comentários:

a) Para ter sentido contrário, o vetor deve ser multiplicado por um escalar negativo. Além disso, quando multiplicamos o vetor por um escalar, seu modulo fica multiplicado pelo módulo do escalar. Logo:

$$\vec{b} = n\vec{a} \Rightarrow |\vec{b}| = |n|.|\vec{a}|$$

Logo, $\vec{b} = (-2)(3, -1, \sqrt{6}) = (-6,2, -2\sqrt{6})$

b) Módulo de $\vec{a}$:

$$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + (-1)^2 + (\sqrt{6})^2} = \sqrt{9+1+6} = \sqrt{16} = 4$$

Portanto, para que $|\vec{b}|$ seja tenha módulo igual 4, devemos multiplicar o módulo do vetor $\vec{a}$ por 1.

Como queremos um sentido contrário, devemos multiplicar o vetor $\vec{a}$ por -1. Logo, $\vec{b} = (-1).\vec{a} = (-3,1, -\sqrt{6})$

c) Queremos um vetor de mesmo sentido, logo, devemos multiplicar por um escalar positivo. O módulo do vetor obtido é 12, logo:

$$|\vec{b}| = |n||\vec{a}| \Rightarrow 12 = |n|.4 \Rightarrow |n| = 3, n > 0 \Rightarrow n = 3$$

Logo:

$$\vec{b} = 3 \cdot \vec{a} = 3(3, -1, \sqrt{6}) = (9, -3,3\sqrt{6})$$

Gabarito: a) $(-6, 2, -2\sqrt{6})$ b) $(-3, 1, -\sqrt{6})$ c)$(9, -3, 3\sqrt{6})$

16.

Obtenha o vetor $\vec{b}$, sabendo que $|\vec{b}| = 5$, $\vec{b}$ é ortogonal ao eixo OX, $\vec{a} \,.\, \vec{b} = 6$ e $\vec{a} = \hat{\imath} + 2\hat{\jmath}$.

Comentários:

Vamos considerar o vetor $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$; a partir do módulo podemos escrever que:

$$|\vec{b}| = 5 \Rightarrow b_x^2 + b_y^2 + b_z^2 = 5^2$$

Condição de ortogonalidade:

$$\vec{b} \underbrace{\cdot}_{produto\ escalar} \hat{\imath} = 0$$

$$\Rightarrow b_x \underbrace{\cdot}_{multiplicação} 1 + b_y \cdot 0 + b_z \cdot 0 = 0$$

$$\Rightarrow b_x = 0$$

Produto escalar de $\vec{a}\,.\vec{b}$:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=6\Rightarrow 1.0+2.b_y+0.b_z=6\Rightarrow b_y=3$$

Por fim, utilizando a equação do módulo de $\vec{b}$, temos que:

$$0^2+3^2+b_z^2=5^2\Rightarrow b_z=\pm 4$$

Portanto, temos que $\vec{b}=(0{,}3{,}4)$ ou $\vec{b}=(0{,}3-4)$.

Gabarito: $\boldsymbol{\vec{b}=(0,3,4)}$ ou $\boldsymbol{\vec{b}=(0,3-4)}$

17.

Calcule o valor de α para que os vetores $\vec{a}+\vec{b}$ seja ortogonal ao vetor $\vec{c}-\vec{a}$. Dado que: $\vec{a}=(2{,}1,\alpha)$, $\vec{b}=(\alpha+2,-5{,}2)$ e $\vec{c}=(2\alpha,8,\alpha)$.

Comentários:

Vamos determinar $\vec{a}+\vec{b}$ e $\vec{c}-\vec{a}$:

$$\vec{a}+\vec{b}=(\alpha+4,-4{,}2+\alpha)\text{ e }\vec{c}-\vec{a}=(2\alpha-2{,}7{,}0)$$

Para que $\vec{a}+\vec{b}$ e $\vec{c}-\vec{a}$ sejam ortogonais, temos que:

$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right).(\vec{c}-\vec{a})=0\Rightarrow(2\alpha-2)(\alpha+4)-4.7+(2+\alpha).0=0$$

$$\Rightarrow 2\alpha^2+6\alpha-8-28=0\Rightarrow 2\alpha^2+6\alpha-36=0\Rightarrow \alpha^2+3\alpha-18=0$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha=3\text{ ou }\alpha=-6}$$

Gabarito: $\boldsymbol{\alpha=3\text{ ou }\alpha=-6}$

18.

Obtenha o vetor $\vec{x}$ tal que: $\vec{x}\cdot(1{,}4,-3)=-7$ e $\vec{x}\times(4,-2{,}1)=(3{,}5,-2)$.

Comentários:

Vamos dizer que $\vec{x}=(x_1,x_2,x_3)$, assim, temos que:

$$\vec{x}\cdot(1{,}4,-3)=-7\Rightarrow x_1.1+x_2.4+x_3.(-3)=-7\ (1)$$

$$\vec{x}\times(4,-2{,}1)=\begin{vmatrix}\hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k}\\ x_1 & x_2 & x_3\\ 4 & -2 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x_2 & x_3\\ -2 & 1\end{vmatrix}.\hat{\imath}-\begin{vmatrix}x_1 & x_3\\ 4 & 1\end{vmatrix}.\hat{\jmath}+\begin{vmatrix}x_1 & x_2\\ 4 & -2\end{vmatrix}.\hat{k}$$

$$\vec{x}\times(4,-2{,}1)=(x_2+2x_3)\hat{\imath}+(4x_3-x_1)\hat{\jmath}+(-2x_1-4x_2)\hat{k}$$

$$\vec{x}\times(4,-2{,}1)=(x_2+2x_3,4x_3-x_1,-2x_1-4x_2)$$

$$\vec{x}\times(4,-2{,}1)=(3{,}5,-2)$$

Então:

$$\begin{cases} x_2 + 2x_3 = 3 \ (2) \\ 4x_3 - x_1 = 5 \ (3) \\ -2x_1 - 4x_2 = -2 \ (4) \end{cases}$$

Ao somar a equação (1) com (4), temos que:

$$[x_1.1 + x_2.4 + x_3.(-3)] + [-2x_1 - 4x_2] = -7 - 2 \Rightarrow -x_1 - 3x_3 = -9 \ (5)$$

Fazendo $(3) - (5)$, temos:

$$[4x_3 - x_1] - [-x_1 - 3x_3] = 5 - (-9) \Rightarrow 7x_3 = 14 \Rightarrow \boxed{x_3 = 2}$$

Substituindo $x_3 = 2$ em (2) temos que:

$$x_2 + 2(2) = 3 \Rightarrow \boxed{x_2 = -1}$$

Substituindo $x_2 = -1$ em (4), encontraremos x_1:

$$-2x_1 - 4(-1) = -2 \Rightarrow -2x_1 = -6 \Rightarrow \boxed{x_1 = 3}$$

Logo:

$$\boxed{\vec{x} = (3, -1, 2)}$$

Gabarito: $\vec{x} = (3, -1, 2)$

19.

Encontre um vetor que seja simultaneamente ortogonal aos vetores $\vec{a} + 2\vec{b}$ e $\vec{b} - \vec{a}$, onde $\vec{a} = (-3, 2, 0)$ e $\vec{b} = (0, -1, -2)$.

Comentários:

Como visto em teoria, ao calcularmos o produto vetorial de dois vetores, encontramos um terceiro vetor ortogonal ao plano dos dois primeiros, logo esse vetor é ortogonal aos dois vetores anteriores. Assim, basta calcularmos $(\vec{a} + 2\vec{b})x(\vec{b} - \vec{a})$.

Vamos calcular os vetores individualmente: $\vec{a} + 2\vec{b} = (-3, 0, -4)$ e $\vec{b} - \vec{a} = (3, -3, -2)$. Dessa forma, temos que:

$$(\vec{a} + 2\vec{b})x(\vec{b} - \vec{a}) = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ -3 & 0 & -4 \\ 3 & -3 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} . \hat{\imath} - \begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} . \hat{\jmath} + \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} . \hat{k}$$

Portanto:

$$(\vec{a} + 2\vec{b})x(\vec{b} - \vec{a}) = 12\hat{\imath} - 18\hat{\jmath} + 9\hat{k} = (-12, -18, 9)$$

Gabarito: $(-12, -18, 9)$



20.

Determine o valor de m para que o paralelogramo definido por $\vec{a} = (m, -3,1)$ e $\vec{b} = (1, -2,2)$ tenha área igual $\sqrt{26}$.

Comentários:

Vamos calcular o módulo de $|\vec{a} \times \vec{b}|$, pois, como vimos, o módulo de $\vec{a}$ vetor$\vec{b}$ equivale a área do paralelogramo definido por eles:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ m & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} . \hat{\imath} - \begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} . \hat{\jmath} + \begin{vmatrix} m & -3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} . \hat{k}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (-4)\hat{\imath} + (-2m + 1)\hat{\jmath} + (-2m + 3)\hat{k}$$

Logo:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{(-4)^2 + (-2m + 1)^2 + (-2m + 3)^2} = \sqrt{26}$$

$$\Rightarrow 16 + 4m^2 - 4m + 1 + 4m^2 - 12m + 9 = 26 \Rightarrow 8m^2 - 16m = 0$$

$$\Rightarrow 8m(m - 2) = 0$$

$$\therefore \boxed{m = 0}\ ou\ \boxed{m = 2}$$

Gabarito: $m = 0$ ou $m = 2$

---

21. (ITA – 1991)

Considere a Terra como sendo uma esfera de raio R e massa M, uniformemente distribuída. Um satélite artificial descreve uma órbita circular a uma altura h da superfície da Terra, onde a aceleração gravitacional (sobre a órbita) é g. Em termos de algarismos significativos, o quadrado da velocidade do satélite é mais bem representado por:

a) $16{,}81 \cdot 10^6\ (km/h)^2$

b) $3{,}62 \cdot 10^{32}\ (km/h)^2$

c) $6{,}05 \cdot 10^7\ (m/s)^2$

d) $6{,}0517 \cdot 10^7\ (m/s)^2$

e) Nenhum dos valores apresentados é adequado.

Dados: $R = 6{,}378 . 10^6\ m$; $M = 5{,}983 \cdot 10^{24}\ kg$; $h = 2{,}00 \cdot 10^5\ m$ e $g = 9{,}2\ m/s^2$

Note e adote: $V^2 = g \cdot (R + h)$

Comentários:

Uma boa dica para saber se a questão é de algarismos significativos é olhar as alternativas. Geralmente, existem alternativas semelhantes, mas com número de algarismos significativos diferentes.

Utilizando a velocidade descrita no note e adote, temos que:

$$V^2 = 9{,}2(63{,}78 \cdot 10^5 + 2{,}00 \cdot 10^5)$$



$$V^2 = 9{,}2 \cdot 65{,}78 \cdot 10^5$$

Diante dos dados mencionados no enunciado, vemos que a gravidade possui a menor quantidade de algarismos significativos, logo ela limita o número de algarismos significativos. Se considerarmos os algarismos duvidosos de cada parte temos:

$$V^2 = 9{,}2X \cdot 65{,}78Y \cdot 10^5$$

Logo, devemos ter o resultado expresso com 3 algarismos significativos:

$$\therefore V^2 = 6{,}05 \cdot 10^7\ (m/s)^2$$

Gabarito: C

22. (ITA-2002)

A massa inercial mede a dificuldade em se alterar o estado de movimento de uma partícula. Analogamente, o momento de inércia de massa mede a dificuldade em se alterar o estado de rotação de um corpo rígido. No caso de uma esfera, o momento de inércia em torno de um eixo que passa pelo seu centro é dado por $I = \frac{2}{5}MR^2$, em que M é a massa da esfera e R seu raio. Para uma esfera de massa $M = 25{,}0\ kg$ e raio $R = 15{,}0\ cm$, a alternativa que melhor representa o seu momento de inércia é

a) $22{,}50 \cdot 10^2\ kg \cdot m^2$

b) $2{,}25\ kg \cdot m^2$

c) $0{,}225\ kg \cdot m^2$

d) $0{,}22\ kg \cdot m^2$

e) $22{,}00\ kg \cdot m^2$

Comentários:

De acordo com os enunciados fornecidos, temos que:

$$I = \frac{2}{5}M \cdot R^2 = \frac{2}{5}(25{,}0) \cdot (15 \cdot 10^{-2})^2$$

$$I = 0{,}225\ kg \cdot m^2$$

Gabarito: C

23. (ITA – 2007)

Sobre um corpo de $2{,}5kg$ de massa atuam, em sentidos opostos de uma mesma direção, duas forças de intensidades $150{,}40N$ e $50{,}40N$, respectivamente. A opção que oferece o módulo da aceleração resultante com o número correto de algarismos significativos é

a) $40{,}00\ m/s^2$

b) $40\ m/s^2$

c) $0{,}4 \cdot\ 10^2 m/s^2$

d) $40{,}0\ m/s^2$

e) $40{,}000\ m/s^2$

Comentários:

Primeiramente, devemos calcular a força resultante sobre o corpo, levando em consideração o número de algarismos significativos:

$$F_R = 150{,}40 - 50{,}40$$

$$F_R = 100{,}0 \text{ (4 significativos)}$$

A aceleração será dada por:

$$a = \frac{F_R}{m} = \frac{100{,}0}{2{,}5}$$

Como a massa limita o número de algarismos significativos a 2, então a aceleração terá dois algarismos significativos:

$$a = 40\ m/s^2$$

Gabarito: B

24. (UNICAMP-94)

Impressionado com a beleza da jovem modelo (1,70 m de altura e 55 kg), um escultor de praia fez sua (dela) estátua de areia do mesmo tamanho que o modelo. Adotando valores razoáveis para os dados que faltam no enunciado:

a) calcule o volume da estátua (em litros);

b) estime a ordem de grandeza do número de grãos de areia que foram usados na escultura

Comentários:

a) Considerando que uma pessoa adulta é composta, em média por 70% de água, cuja densidade vale $1g/cm^3$, então:

$$m_{água} = 0{,}7m_{pessoa} = 0{,}7 \cdot 55 = 38{,}5\ kg = 38{,}5 \cdot 10^3 g$$

$$V_{água} = \frac{38{,}5 \cdot 10^3}{1} = 38{,}5 \cdot 10^3 cm^3 = 38{,}5\ dm^3 = 38{,}5\ l$$

Tamanho da estátua igual ao da pessoa e que água seja responsável por quase todo volume do corpo humano, logo $V_{estátua} = 38{,}5\ l$.

b) Se considerarmos que o volume de um grão de areia igual a $0{,}01\ mm^3$, então:

$$0{,}01\ mm^3 = 0{,}01\ (10^{-2})^3 dm^3 = 1 \cdot 10^{-8} l$$

Dividindo o volume da estátua pelo volume de um grão, então:

$$n = \frac{V_{estátua}}{V_{grão}} = \frac{38{,}5}{1 \cdot 10^{-8}} = 3{,}85 \cdot 10^9$$

Como $3{,}85 > 3{,}16$, então a ordem de grandeza será de $OG = 9 + 1 = 10$ (grão).

Gabarito: a) $38{,}5\ l$ b) 10

25. (UERJ)

O acelerador de íons pesados relativísticos de Brookhaven (Estados Unidos) foi inaugurado com a colisão entre dois núcleos de ouro, liberando uma energia de 10 trilhões de elétrons-volt. Os cientistas esperam, em breve, elevar a energia a 40 trilhões de elétrons-volt, para simular as condições do Universo durante os primeiros microssegundos após o Big Bang. (Ciência Hoje,

setembro de 2000). Sabendo que 1 elétron-volt é igual a $1,6.10^{-19}$ *joules*, a ordem de grandeza da energia, em joules, que se espera atingir em breve, com o acelerador de Brookhaven, é:

a) 10^{-8} b) 10^{-7} c) 10^{-6} d) 10^{-5}

Comentários:

O valor esperado de ser atingido é de 40 trilhões de elétrons-volt, em que cada elétron-volt é igual a $1,6 \cdot 10^{-16}\ J$. Portanto:

$$40\ trilhões = 40 \cdot 10^{12} = 4,0 \cdot 10^{13}$$

$$40\ trilhões\ de\ elétron - volt \Rightarrow 4,0 \cdot 10^{13} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} = 6,4 \cdot 10^{-6}\ J$$

Como $6,4 > 3,16$, então a ordem de grandeza será $-6 + 1 = -5$.

Gabarito: D

---

26. (Inédita - Prof. Toni Burgatto)

Dois vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ de módulos constantes estão dispostos em um plano. Sabe-se que o maior e menor valor da resultante desses vetores é 32 u e 8 u, respectivamente. O módulo de $\vec{A} - \vec{B}$ quando $\vec{A}$ e $\vec{B}$ formam um ângulo de 60° é igual:

a) $\sqrt{19}\ u$ b) $2\sqrt{19}\ u$ c) $3\sqrt{19}\ u$

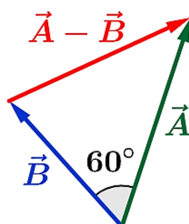
d) $4\sqrt{19}\ u$ e) $5\sqrt{19}\ u$

Comentários:

Quando dois vetores estão em um plano, o seu valor máximo ocorre quando os dois vetores estão no mesmo sentido e o valor mínimo quando eles estão em sentidos contrários. Sem perda de generalidade, podemos dizer que $\vec{A}$ é o vetor de maior módulo. Portanto:

$$\begin{cases} A + B = 32 \\ A - B = 8 \end{cases} \Rightarrow 2A = 40 \Rightarrow A = 20\ u \therefore B = 12\ u$$

Quando eles formam um ângulo de 60°, temos a seguinte disposição dos vetores:



Pela lei dos cossenos, temos:

$$|\vec{A} - \vec{B}| = \sqrt{A^2 + B^2 - 2 \cdot A \cdot B \cdot \underbrace{\cos(60°)}_{=1/2}}$$

$$\left|\vec{A}-\vec{B}\right| = \sqrt{20^2 + 12^2 - 2 \cdot 20 \cdot 12 \cdot \frac{1}{2}}$$

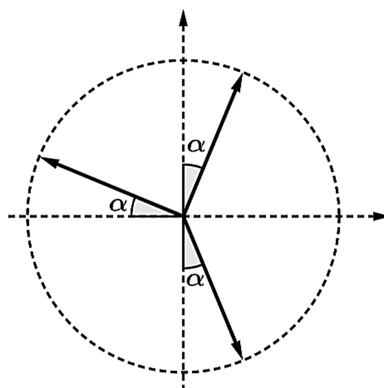
$$\left|\vec{A}-\vec{B}\right| = \sqrt{304} = \sqrt{16 \cdot 19}$$

$$\boxed{\left|\vec{A}-\vec{B}\right| = 4\sqrt{19}\, u}$$

Gabarito: D

27. (Inédita - Prof. Toni Burgatto)

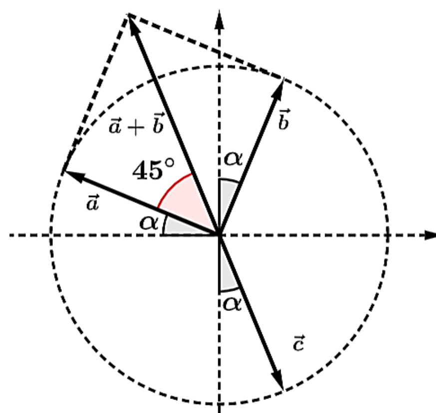
Na figura abaixo, o valor de α para que o vetor resultante seja mínimo é de:



a) 22,5°   b) 30°   c) 45°   d) 60°   e) 75°

Comentários:

Pela figura, vemos que os vetores possuem o mesmo tamanho. Assim, o vetor resultante é mínimo quando a soma de dois deles estiver na mesma direção do terceiro, como na figura abaixo:



Note que como $|\vec{a}| = |\vec{b}|$, o ângulo entre $\vec{a}$ e $\vec{a}+\vec{b}$ deve ser de 45°. Então, pela geometria da questão, temos:

$$45° + \alpha + 90° + \alpha = 180°$$

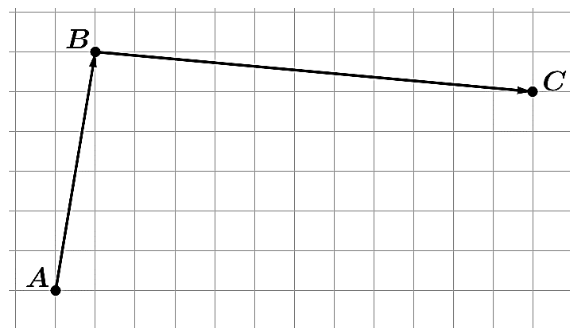
$$2\alpha = 45°$$

$$\therefore \boxed{\alpha = 22{,}5°}$$

Gabarito: A

28. (Inédita - Prof. Toni Burgatto)

Ao realizar uma caminha em um parque, um jovem se deslocou de A para B, seguindo de B para C, conforme figura abaixo.



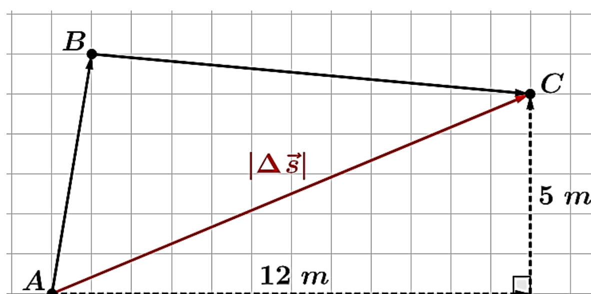
Dessa forma, o vetor deslocamento do jovem tem intensidade igual a:

Considere que cada quadradinho tenha um tamanho igual a 1 metro.

a) $13\ m$ b) $3\sqrt{5}\ m$ c) $6\sqrt{2}\ m$ d) $10\ m$ e) $4\sqrt{3}\ m$

Comentários:

Determinar o vetor deslocamento nesse caso, é o mesmo que fazer:



Portanto:

$$|\Delta\vec{s}|^2 = 5^2 + 12^2$$

$$|\Delta\vec{s}| = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169}$$

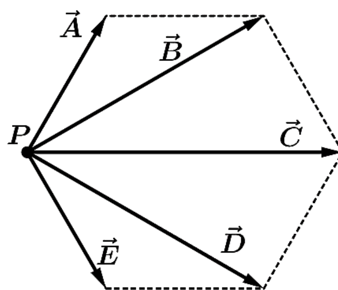
$$\boxed{|\Delta\vec{s}| = 13\ m}$$

Gabarito: A

29. (Inédita - Prof. Toni Burgatto)

No ponto P são aplicadas cincos forças, sendo que $|\vec{C}| = 2\ N$. Dessa forma, a intensidade da força resultante no ponto P é igual a:

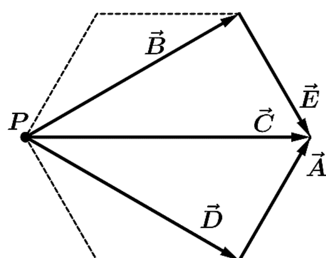
Considere que o hexágono é regular.



(A) 2 N (B) 4 N (C) 6 N (D) $3\sqrt{3}$ N (E) $2\sqrt{5}$ N

Comentários:

De acordo com a figura e pela regra do polígono podemos escrever que:



$$\vec{A}+\vec{D}=\vec{C}$$

$$\vec{B}+\vec{E}=\vec{C}$$

Portanto, o vetor soma é dado por:

$$\vec{R}=\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}+\vec{D}+\vec{E}$$

$$\vec{R}=\underbrace{\left(\vec{A}+\vec{D}\right)}_{=\vec{C}}+\vec{C}+\underbrace{\left(\vec{B}+\vec{E}\right)}_{=\vec{C}}$$

$$\vec{R}=\vec{C}+\vec{C}+\vec{C}=3\vec{C}$$

$$\left|\vec{R}\right|=3\left|\vec{C}\right|$$

$$\left|\vec{R}\right|=3\cdot 2=6\ N$$

Gabarito: C

30. (Inédita - Prof. Toni Burgatto)

Dois vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$, de mesmo módulo, formam um ângulo agudo θ. Dessa forma, a razão entre os módulos de $\vec{A}+\vec{B}$ e $\vec{A}-\vec{B}$ é igual a:

a) $tg\left(\frac{\theta}{2}\right)$ b) $cotg\left(\frac{\theta}{2}\right)$ c) $sen\left(\frac{\theta}{2}\right)$

d) $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ e) $tg(2\theta)$

Comentários:



Denotando $|\vec{A}| = |\vec{B}| = a$, então:

$$|\vec{A} + \vec{B}| = \sqrt{a^2 + a^2 + 2 \cdot a \cdot a \cdot \cos(\theta)}$$

E:

$$|\vec{A} - \vec{B}| = \sqrt{a^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot a \cdot \cos(\theta)}$$

Então a razão desejada é:

$$\frac{|\vec{A} + \vec{B}|}{|\vec{A} - \vec{B}|} = \frac{\sqrt{a^2 + a^2 + 2 \cdot a \cdot a \cdot \cos(\theta)}}{\sqrt{a^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot a \cdot \cos(\theta)}}$$

$$\frac{|\vec{A} + \vec{B}|}{|\vec{A} - \vec{B}|} = \sqrt{\frac{2a^2 + 2a^2 \cdot \cos(\theta)}{2a^2 - 2a^2 \cdot \cos(\theta)}}$$

$$\frac{|\vec{A} + \vec{B}|}{|\vec{A} - \vec{B}|} = \sqrt{\frac{1 + \cos(\theta)}{1 - \cos(\theta)}}$$

Da trigonometria, utilizando arco duplo, sabemos que:

$$\begin{cases} \cos(\theta) = 1 - 2sen^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \cos(\theta) = 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 - \cos(\theta) = 2sen^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ 1 + \cos(\theta) = 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{cases}$$

Portanto:

$$\frac{|\vec{A} + \vec{B}|}{|\vec{A} - \vec{B}|} = \sqrt{\frac{2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2sen^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}} \Rightarrow \frac{|\vec{A} + \vec{B}|}{|\vec{A} - \vec{B}|} = \sqrt{\left(\frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{sen\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right)^2}$$

$$\frac{|\vec{A} + \vec{B}|}{|\vec{A} - \vec{B}|} = \sqrt{\left(cotg\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^2}$$

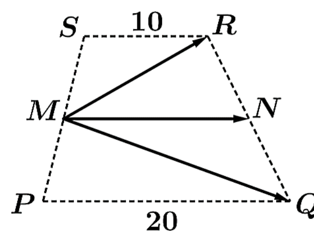
Como é uma razão de módulos e o ângulo é agudo, temos:

$$\boxed{\frac{|\vec{A} + \vec{B}|}{|\vec{A} - \vec{B}|} = cotg\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

Gabarito: B

31. (Inédita – Prof. Toni Burgatto)

Se M e N são pontos médios, o módulo do vetor resultante é de:

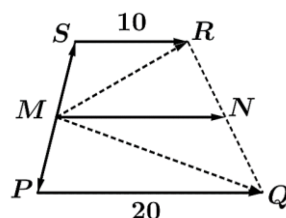


Considere que PQRS é um trapézio, com $SR = 10$ e $PQ = 20$.

a) 25 b) 30 c) 45 d) 55 e) 60

Comentários:

O vetor $\overrightarrow{MR}$ pode ser escrito como $\overrightarrow{MR} = \overrightarrow{MS} + \overrightarrow{SR}$, assim como o vetor $\overrightarrow{MQ}$ pode ser escrito como $\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PQ}$. Então:



Como M e N são pontos médios, então:

$$MN = \frac{10 + 20}{2} = 15$$

Então:

$$\vec{R} = \overrightarrow{MR} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MQ}$$

$$\vec{R} = \overrightarrow{MS} + \overrightarrow{SR} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PQ}$$

Mas, $\overrightarrow{MS} + \overrightarrow{MP} = \vec{0}$, então:

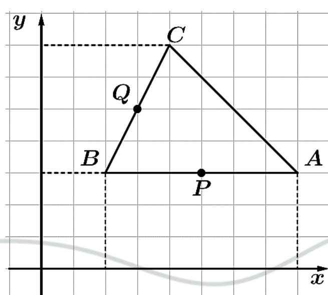
$$\vec{R} = \overrightarrow{SR} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ}$$

$$R = 10 + 20 + 15 = 45$$

Gabarito: C

32. (Inédita – Prof. Toni Burgatto)

Em um plano cartesiano, constrói-se o triângulo ABC, conforme figura abaixo.



Se P e Q são pontos médios de AB e BC, então o vetor $\overrightarrow{PQ}$ é dado por:

a) $(2,-2)$ b) $(-2,2)$ c) $(3,5)$

d) $(-3,5)$ e) $(-5,5)$

Comentários:

De acordo com a figura, temos os pontos A(8,3), B(2,3) e C(4,7). Se P é ponto médio de BC, então:

$$P=\left(\frac{8+2}{2},\frac{3+3}{2}\right)\Rightarrow P=(5,3)$$

Se Q é ponto médio de BC, então:

$$Q=\left(\frac{2+4}{2},\frac{3+7}{2}\right)\Rightarrow Q=(3,5)$$

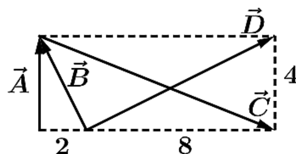
Portanto, o vetor $\overrightarrow{PQ}$ é dado por:

$$\overrightarrow{PQ}=\vec{Q}-\vec{P}=(3,5)-(5,3)\therefore \boxed{\overrightarrow{PQ}=(-2,2)}$$

Gabarito: B

33. (Inédita – Prof. Toni Burgatto)

Seja $\vec{R}$ o vetor resultante definido por $\vec{R}=\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}+\vec{D}$. O módulo de valor de $\vec{R}-2\vec{D}+\vec{A}$ é igual a:



(A) 0 (B) 2 (C) 4 (D) 6 (E) 8

Comentários:

Pela figura, verificamos que:

$$\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}-\vec{D}=\vec{0}$$

Então:

$$\underbrace{\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}+\vec{D}}_{\vec{R}}-2\vec{D}+\vec{A}=\underbrace{\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}-\vec{D}}_{=\vec{0}}+\vec{A}=\vec{A}$$

Portanto:

$$\left|\vec{R}-2\vec{D}+\vec{A}\right|=\left|\vec{A}\right|=4$$

Gabarito: C

34. (Inédita – Prof. Toni Burgatto)



Tomando dois vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ podemos gerar dois novos vetores, como na figura abaixo:



Se $|4\vec{A}-\vec{B}| = 10\ u$ e $|\vec{A}+2\vec{B}| = 10\sqrt{3}\ u$, então $|7\vec{A}-4\vec{B}|$ é igual a:

a) $10\sqrt{3}\ u$
b) $20\sqrt{3}\ u$
c) $10\sqrt{13}\ u$
d) $5\sqrt{3}\ u$
e) $3\sqrt{10}\ u$

Comentários:

Para chegar em $7\vec{A}-4\vec{B}$, devemos notar que:

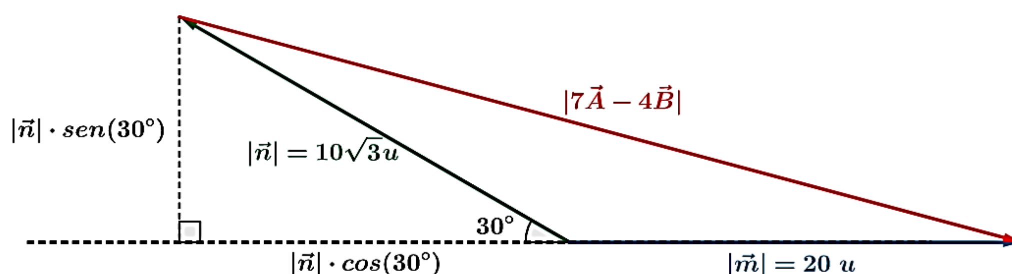
$$7\vec{A}-4\vec{B} = \underbrace{2(4\vec{A}-\vec{B})}_{=\vec{m}} - \underbrace{(\vec{A}+2\vec{B})}_{=\vec{n}}$$

Então:

$$|\vec{m}| = 2|4\vec{A}-\vec{B}| = 2\cdot 10 = 20\ u$$

$$|\vec{n}| = |\vec{A}+2\vec{B}| = 10\sqrt{3}\ u$$

Logo, desejamos saber o módulo de $\vec{m}-\vec{n}$. Para isso, basta olhar para a geometria dos vetores:



$$|7\vec{A}-4\vec{B}| = \sqrt{\left(10\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}\right)^2 + \left(20+10\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

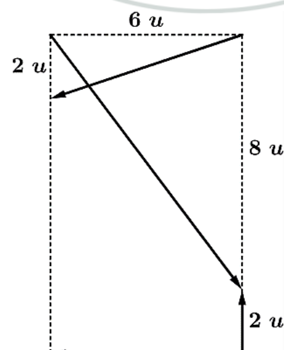
$$|7\vec{A}-4\vec{B}| = \sqrt{25\cdot 3 + 35^2}$$

$$\therefore \boxed{|7\vec{A}-4\vec{B}| = 10\sqrt{13}\ u}$$

Gabarito: C

35. (Inédita – Prof. Toni Burgatto)

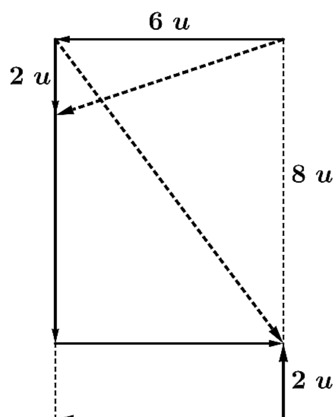
Na figura abaixo são representados 4 vetores em um retângulo. Podemos dizer que o módulo do vetor resultante é de:



a) 2 u b) 4 u c) 6 u d) 8 u e) 10 u

Comentários:

Fazendo a decomposição dos vetores, temos:



Portanto, na direção horizontal, o vetor resultante tem intensidade igual a:

$$R_X = 6\,u$$

Na direção vertical, temos:

$$R_y = 8\,u$$

Logo:

$$R = \sqrt{6^2 + 8^2}$$

$$\therefore \boxed{R = 10\,u}$$

Gabarito: E

36. (Inédita – Prof. Toni Burgatto)

Dois vetores em um mesmo plano tem módulos constante. Sabe-se que o maior e o menor valor de resultante valem 30 u e 6 u, respectivamente. Qual o modulo do vetor diferença quando os vetores formarem um ângulo de 120°?

a) $2\sqrt{19}\,u$ b) $3\sqrt{15}\,u$ c) $6\sqrt{19}\,u$

d) $4\sqrt{13}\,u$ e) $7\sqrt{11}\,u$

Comentários:

Os vetores terão resultante de módulo máximo quando eles estiverem na mesma direção e no mesmo sentido:

$$A + B = 30$$

E terão resultante de módulo mínimo quando estiverem na mesma direção e sentidos opostos, portanto:

$$A - B = 6$$

Portanto:

$$A = 18 \text{ e } B = 12$$

Logo:

$$|\vec{A} - \vec{B}| = \sqrt{A^2 + B^2 - 2 \cdot A \cdot B \cdot \cos(\alpha)}$$

$$|\vec{A} - \vec{B}| = \sqrt{18^2 + 12^2 - 2 \cdot 18 \cdot 12 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)}$$

$$|\vec{A} - \vec{B}| = \sqrt{324 + 144 + 18 \cdot 12}$$

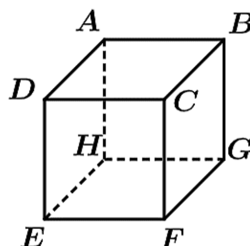
$$|\vec{A} - \vec{B}| = \sqrt{684} \therefore \boxed{|\vec{A} - \vec{B}| = 6\sqrt{19}}$$

Gabarito: C

---

37. (Inédita – Prof. Toni Burgatto)

Considere um cubo de lado a, onde se estabelece as seguintes somas vetoriais.



I. $\overrightarrow{FB} + \overrightarrow{CG} = 2\overrightarrow{FG}$

II. $\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{DG} = 2\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG}\right)$

III. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AE} = 2\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AH}\right)$

Estão corretas:

(A) apenas I.

(B) apenas II.

(C) apenas I e II.

(D) apenas II e III.

(E) todas as afirmativas.

Comentários:

Lembrando que um vetor é definido como $\overrightarrow{XY} = Y - X$, então:

I. Verdadeira. Pois:

$$\overrightarrow{FB} + \overrightarrow{CG} = B - F + G - C = (B - C) + (G - F) = \underbrace{\overrightarrow{CB}}_{=\overrightarrow{FG}} + \overrightarrow{FG} = 2\overrightarrow{FG}$$



II. Verdadeira. Pois:

$$\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{DG} = F - A + G - D = (F - D) + (G - A) = \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{AG}$$

Mas, pela figura, podemos escrever que:

$$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG}$$

Portanto:

$$\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{DG} = 2\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG}\right)$$

III. Verdadeira. Pois:

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CF}$$

$$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AD} + \underbrace{\overrightarrow{DC}}_{=\overrightarrow{AB}} + \underbrace{\overrightarrow{CF}}_{=\overrightarrow{AH}}$$

$$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AH}$$

Logo:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AH}$$

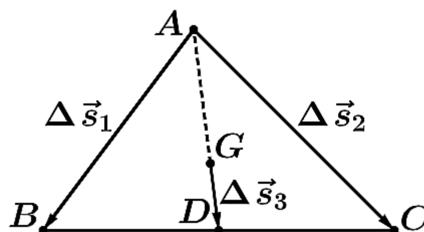
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AE} = 2\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AH}\right)$$

Gabarito: E

---

38. (Inédita – Prof. Toni Burgatto)

Três pessoas caminham em uma praça triangular ABC, conforme figura abaixo. Uma pessoa parte de A em direção a B e a outra de A para C. Uma terceira pessoa parte do baricentro em direção ao ponto médio de BC. Dessa forma, a relação entre os deslocamentos das pessoas é dada por:



a) $\frac{\Delta\vec{s}_3}{3} = \frac{\Delta\vec{s}_1+\Delta\vec{s}_2}{2}$

b) $3\Delta\vec{s}_3 = \Delta\vec{s}_1 + \Delta\vec{s}_2$

c) $6\Delta\vec{s}_3 = \Delta\vec{s}_1 + \Delta\vec{s}_2$

d) $\frac{\Delta\vec{s}_3}{2} = \frac{\Delta\vec{s}_1+\Delta\vec{s}_2}{3}$

Comentários:

Pela propriedade do baricentro, temos:

$$\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{GD} = 2\Delta\vec{s}_3$$



Além disso, temos:

$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CD} = \vec{a}$$

Por soma de vetores, podemos afirmar que:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$$

$$\Delta\vec{s}_1 + \vec{a} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GD}$$

$$\Delta\vec{s}_1 + \vec{a} = 2\Delta\vec{s}_3 + \Delta\vec{s}_3$$

$$\Delta\vec{s}_1 + \vec{a} = 3\Delta\vec{s}_3\ (eq. 1)$$

Pelo outro lado, temos:

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC}$$

$$3\Delta\vec{s}_3 + \vec{a} = \Delta\vec{s}_2\ (eq. 2)$$

Isolando $\vec{a}$ de 1 e substituindo em 2, vem:

$$3\Delta\vec{s}_3 + 3\Delta\vec{s}_3 - \Delta\vec{s}_1 = \Delta\vec{s}_2$$

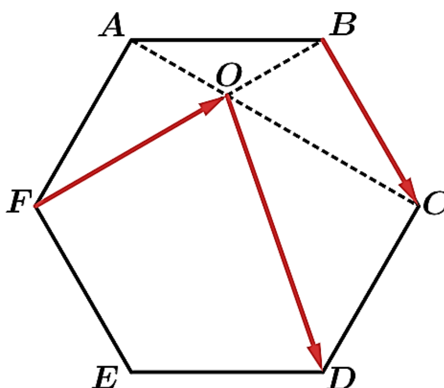
$$\boxed{6\Delta\vec{s}_3 = \Delta\vec{s}_1 + \Delta\vec{s}_2}$$

Gabarito: C

---

39. (Inédita – Prof. Toni Burgatto)

As forças que atuam em um corpo foram diagramada em um hexágono de lado L, como na figura abaixo. Dessa forma, o modulo de $\overrightarrow{FO} - \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{BC}$.

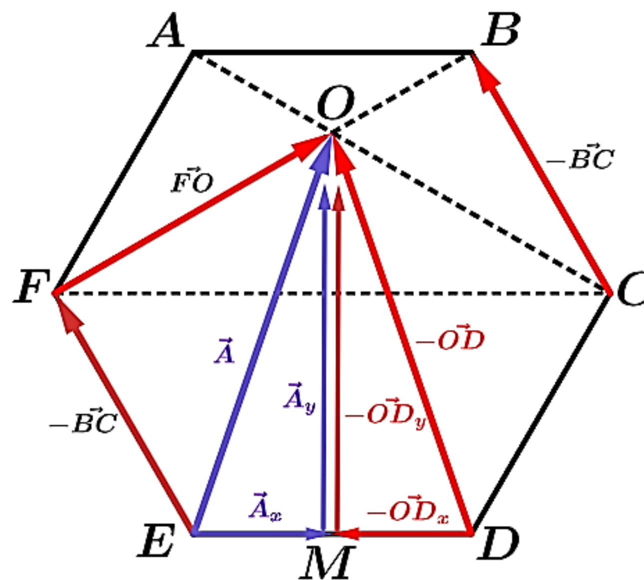


a) $\frac{2\sqrt{3}}{3}L$ b) $\sqrt{3}L$ c) $\frac{4\sqrt{3}}{3}L$ d) $\frac{5\sqrt{3}}{3}L$

Comentários:

Podemos representar os vetores $-\overrightarrow{BC}$ e $-\overrightarrow{OD}$ da seguinte forma:





Assim, notamos que:

$$\vec{A} = \overrightarrow{FO} + \left(-\overrightarrow{BC}\right)$$

Então, nossa soma desejada pode ser expressa por:

$$\vec{S} = \underbrace{\overrightarrow{FO} + \left(-\overrightarrow{BC}\right)}_{\vec{A}} + \left(-\overrightarrow{OD}\right)$$

$$\vec{S} = \vec{A}_x + \vec{A}_y + \left(-\overrightarrow{OD}\right)_x + \left(-\overrightarrow{OD}\right)_y$$

Mas, pela figura, $\vec{A}_x + \left(-\overrightarrow{OD}\right)_x = \vec{0}$. Portanto:

$$\vec{S} = \vec{A}_y + \left(-\overrightarrow{OD}\right)_y$$

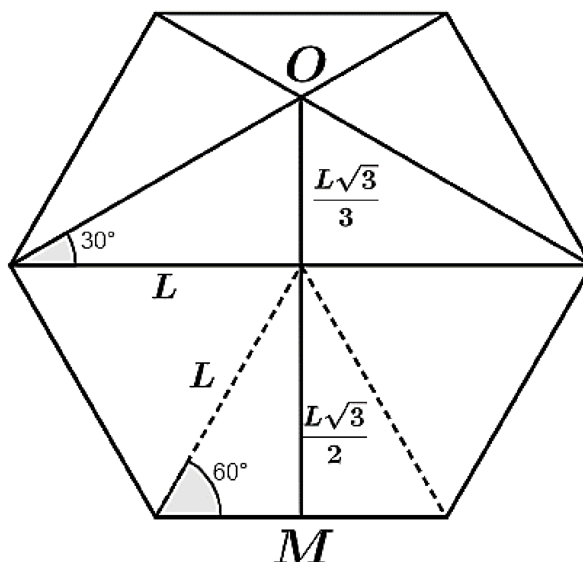
Além disso, percebemos que: $\vec{A}_y = \left(-\overrightarrow{OD}\right)_y$. Portanto:

$$\vec{S} = 2\vec{A}_y$$

Então:

$$\left|\vec{S}\right| = 2\left|\vec{A}_y\right| = 2 \cdot \overline{OM}$$

Matematicamente, temos a seguinte figura:



Pela figura:

$$\overline{OM} = \frac{L\sqrt{3}}{2} + \frac{L\sqrt{3}}{3}$$

$$\overline{OM} = \frac{5\sqrt{3}}{3}L$$

Gabarito: D



7. Introdução à cinemática

7.1. Conceitos básicos

A Cinemática é o ramo da Mecânica que descreve os movimentos dos corpos através dos conceitos de posição, velocidade e aceleração. A Dinâmica estuda os fatores que modificam os movimentos.

Inicialmente, serão necessários alguns conceitos primitivos, os quais não são definidos, mas devem ter a mesma significação para todos. Os primeiros conceitos primitivos são os conceitos de instante e de tempo.

Instante é o momento na qual se registra o tempo. Geralmente, utiliza-se cronômetros e relógios para registrar esses tempos. O instante ao qual se associa tempo zero ($t = 0$) recebe o nome de origem dos tempos.

Define-se tempo ou intervalo de tempo como a duração de um fenômeno físico.

Por exemplo, podemos dizer que um trem passou por uma estação no instante de tempo t_1 e chegou à segunda estação no instante t_2.

Dessa forma, pode-se afirmar que o fenômeno ocorreu num intervalo de tempo, cuja duração foi $\Delta t = t_2 - t_1$.

Vamos imaginar um exemplo simples: um trem sai da estação em direção a duas cidades. No momento de saída disparamos o cronômetro, ou seja, definimos o tempo zero ($t_0 = 0$). Depois de 1h hora o trem passa pela cidade A ($t_1 = 1h$), e quando o cronômetro indica 3h ($t_2 = 3h$) o trem passa pela cidade B.

Assim, podemos dizer que o intervalo de tempo entre a estação e a cidade A foi $\Delta t_{estação \to A} = t_1 - t_0 = 1 - 0 = 1h$.

O tempo entre A e B foi: $\Delta t_{A \to B} = t_2 - t_1 = 3 - 1 = 2h$.

Por fim, o tempo entre a estação e a cidade B foi $\Delta t_{estação \to B} = t_2 - t_0 = 3 - 0 = 3h$.

7.2. Localização de um ponto material para um dado referencial

Inicialmente, é necessário saber diferenciar *ponto material* de *corpo extenso*.

Ponto material é todo corpo cujas dimensões não interferem no estudo de determinado fenômeno.

Se o corpo não puder ser considerado ponto material, ele se classificará como corpo extenso.

Note que um corpo pode ser um ponto material para uma determinada situação, como por exemplo um caminhão indo de São Paulo para a Bahia, pois as dimensões do caminhão são muito menores que a distância a ser percorrida. Por outro, em uma situação na qual o caminhão está manobrando num estacionamento, ele é um corpo extenso.

A partir dessa diferenciação de corpo extenso e ponto material, podemos fazer a determinação da posição de um ponto material P.

Para isto, é preciso definir *referenciais* ou *sistemas de referência* (R).

Dessa forma, para localizar o ponto P em relação ao referencial R, é preciso conhecer as distâncias de P aos pontos de R, conforme a figura abaixo. A determinação do referencial é feita de acordo com as condições dos problemas, de modo a facilitar as contas e resolução da questão.

Embora todos os problemas físicos ocorram no mundo em três dimensões, geralmente condicionamos o referencial de forma a facilitar a resolução do problema.

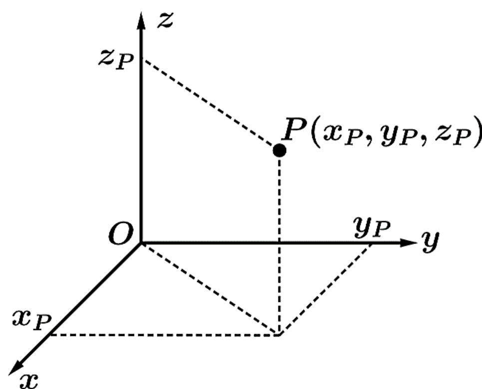


Figura 27: Ponto P segundo o referencial R com origem em O.

Observação: No Brasil, o sistema de unidades adotado é o Sistema Internacional de Unidades (SI). Ao longo do nosso curso de Física, trabalharemos com diversas unidades no SI. Por enquanto, vamos trabalhar com apenas unidades para tempo e espaço.

A unidade de tempo no SI é o segundo (s). O minuto (min) e a hora (h) são múltiplos do segundo:

$$1min = 60s$$

$$1h = 60min = 3600s$$

A unidade de comprimento no SI é o metro (m). O milímetro (mm) e o centímetro (cm) são submúltiplos do metro. O quilômetro (km) é múltiplo do metro:

$$1mm = 10^{-3}m$$

$$1cm = 10^{-2}m$$

$$1km = 10^{3}m$$

7.3. Movimento e repouso

Dizemos que um dado ponto material está em repouso em relação a certo referencial quando todas as suas coordenadas (x, y, z), medidas em relação ao referencial, permanecem invariáveis com o passar do tempo. Se uma de suas coordenadas variar, dizemos que o ponto material está em movimento, em relação ao referencial adotado.

Observe que o conceito de repouso e de movimento dependem do referencial adotado. Um ponto material pode estar em repouso em relação a um referencial e em movimento em relação a outro.

Por exemplo, duas pessoas sentadas em um ônibus. Se uma pessoa olhar para a outra terá a impressão de estar parada, pois o referencial está no ônibus onde as duas pessoas se encontram. Entretanto, uma terceira pessoa parada na calçada, ao olhar para elas, verá que as duas estão em movimento, conforme o deslocamento do ônibus. Pode-se dizer que para a terceira pessoa adotou-se como referencial a Terra, pois, ela está parada na calçada.

7.4. Trajetória

Definimos como trajetória a curva que descreve o movimento realizado pelo ponto material, em relação a um determinado referencial.

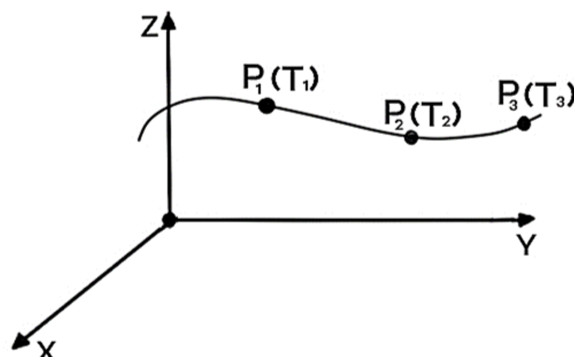


Figura 28: Representação de uma trajetória curva no espaço.

Se o ponto material estiver em repouso, para o referencial escolhido, sua trajetória se reduz a um ponto geométrico.

Ao definirmos trajetória, condicionamos sua definição ao referencial adotado. Vamos estudar um exemplo simples de um menino jogando uma bola no chão do ônibus em movimento. Considere que o ônibus esteja viajando a uma velocidade constante, em uma trajetória retilínea.

Para o menino dentro do ônibus, a bola faz uma trajetória na vertical, fazendo um segmento de reta. Entretanto, para uma pessoa parada na calçada, isto é, no referencial da Terra, a bola faz uma curva de um arco de parábola (a demonstração formal de que a curva é um arco de parábola será feita no capítulo de lançamento oblíquo, um dos últimos capítulos do nosso curso de cinemática.).

Vide as figuras a seguir:

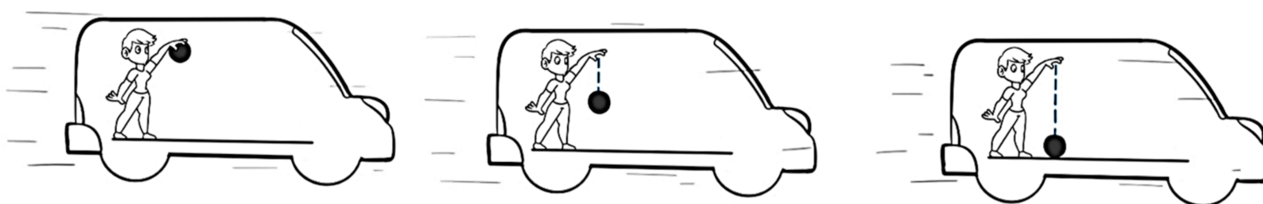


Figura 29: Representação da trajetória da bola, com referencial na criança.

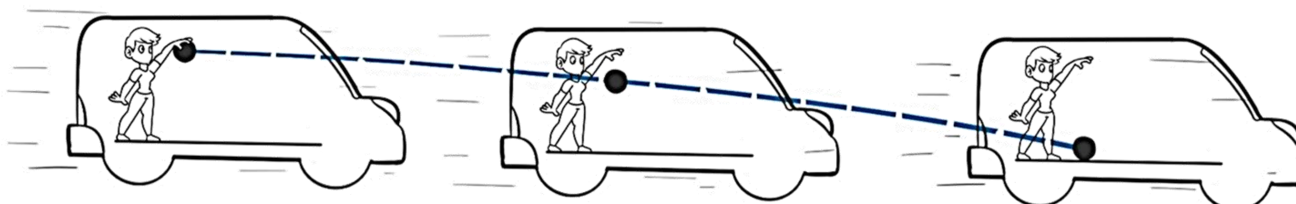


Figura 30: Representação da trajetória da bolinha para um referencial situado na Terra.

O capítulo de movimento relativo será abordado futuramente, mas apenas como curiosidade, existe a ideia de repouso relativo. Imagine dois automóveis percorrendo uma mesma estrada retilínea, com velocidades iguais e no mesmo sentido, sem aceleração, não havendo movimento de um em relação ao outro.



Um passageiro de um dos carros, fixando seu olhar exclusivamente no outro carro, sem fazer nenhuma comparação com a estrada e a vizinhança, tem a sensação de que o outro carro está parado. Essa mesma ideia é utilizada no abastecimento de aeronaves em pleno voo. Para isto, basta que não haja movimento relativo entre elas por determinado intervalo de tempo.

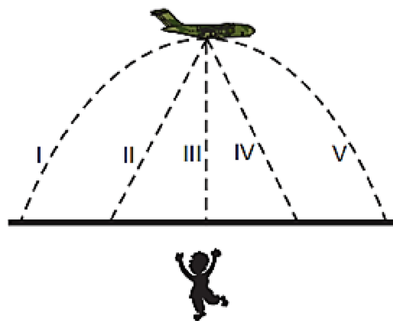


2)

Recentemente, o PAM (Programa Alimentar Mundial) efetuou lançamentos aéreos de 87t de alimentos (sem uso de paraquedas) na localidade de Luvemba, em Angola. Os produtos foram ensacados e amarrados sobre placas de madeira para resistirem ao impacto da queda.

Disponível em: <www.angola.org>.

A figura ilustra o instante em que um desses pacotes é abandonado do avião. Para um observador em repouso na Terra, o diagrama que melhor representa a trajetória do pacote depois de abandonado, e:



(A) I (B) II (C) III (D) IV (E) V

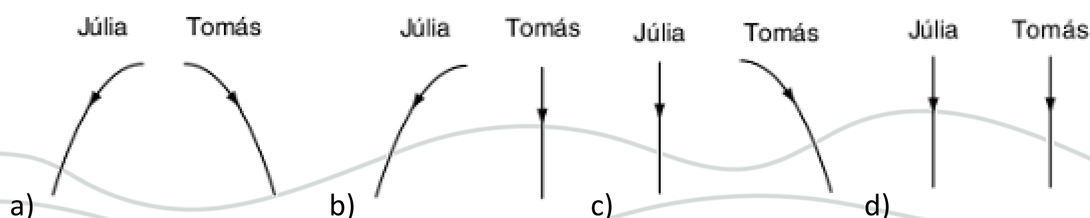
Comentários:

Ao ser abandonado do avião, o pacote não possui velocidade na direção vertical, entretanto, ele possui a mesma velocidade horizontal do avião, por isso, o pacote seguirá seu movimento na horizontal ao mesmo tempo que está caindo. Portanto, sua trajetória será um arco de parábola, semelhante ao caso do menino soltando a bola dentro do ônibus, na parte teórica.

Alternativa correta letra (E).

3)

Julia está andando de bicicleta, com velocidade constante, quando deixa cair uma moeda. Tomás está parado na rua e vê a moeda cair. Assinale a alternativa em que melhor estão representadas as trajetórias da moeda, como observadas por Júlia e por Tomás.



Resolução:

Pelo referencial de Júlia, não existe movimento relativo na horizontal entre a moeda e a Júlia andando de bicicleta, pois, a moeda sai com a mesma velocidade horizontal que Júlia. Então, Júlia vê a moeda cair na vertical.

Entretanto, Tomás, que está parado na rua, vê a composição do movimento horizontal junto com o movimento vertical da moeda. Ele vê a moeda indo para a frente, na direção do deslocamento de Júlia, e, ao mesmo tempo, vê a moeda caindo na vertical.

Essa composição de movimento descreve uma trajetória curva, formando um arco de parábola. Novamente, veremos a demonstração formal dessa curva futuramente.

Alternativa correta letra C).

7.5. Espaço de um móvel

Vamos utilizar um exemplo para facilitar nosso entendimento. Um carro vai de São Paulo ao Rio de Janeiro e desejamos saber sua posição ao passar por São José dos Campos. Para isso, podemos definir um sistema cartesiano triortogonal e determinar os valores das coordenadas (x, y, z), conforme a figura abaixo:

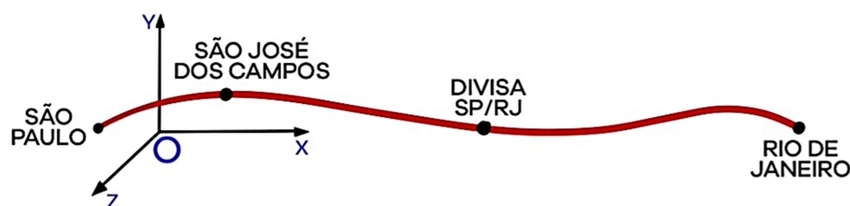


Figura 31: Representação da trajetória de São Paulo ao Rio de Janeiro no espaço.

Entretanto, diante das condições do problema, é bem mais simples fornecer a posição do carro em relação à própria trajetória que já é conhecida. Para isso, definimos um ponto O de forma arbitrária como sendo a origem e uma orientação para a trajetória.

Para o nosso exemplo, podemos definir a Divisa SP/RJ como nossa origem e a orientação positiva no sentido de Rio de Janeiro para São Paulo:

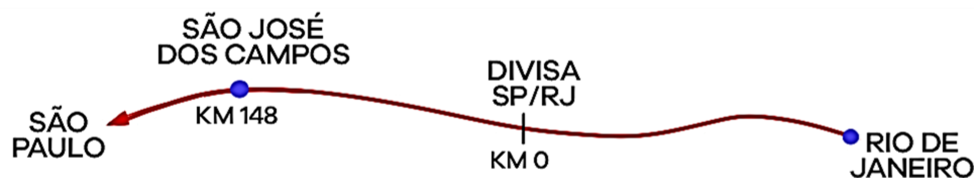


Figura 32: Representação da trajetória de São Paulo para Rio de Janeiro, em apenas uma dimensão.

Podemos afirmar que São José dos Campos situa-se no km 147 da Via Dutra.

Observação: A escolha da origem e da orientação não alteram o lugar onde se encontra o corpo. No exemplo do carro indo de São Paulo para Rio de Janeiro, você poderia ter escolhido outro ponto de origem e outra direção e, mesmo assim, o móvel estaria em São José dos Campos.

Assim, denominamos espaço a posição de uma partícula em relação à sua trajetória. Observe que ao fazer tais considerações, a cada valor de tempo corresponde um único valor de espaço.

7.6. Função horária do espaço

Se um ponto material está em movimento em relação a certo referencial, à medida que o tempo transcorre, o espaço do móvel varia. Assim, a função horária do espaço é a função que relaciona os espaços s de um móvel com os correspondentes instantes t.

Dessa forma, conhecer a função horária do espaço é muito importante, pois se conhecemos a função horária podemos determinar o espaço do móvel para cada instante de tempo.

Vamos analisar dois exemplos:

1) $s(t) = 20 - 5t$ (para s em metros e t em segundos):

$$t = 0 \Rightarrow s(0) = 20 - 5.0 = 20m$$

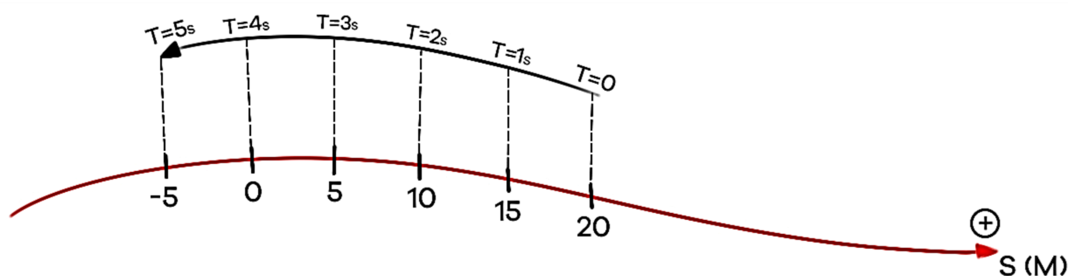
$$t = 1s \Rightarrow s(1) = 20 - 5.1 = 15m$$

$$t = 2s \Rightarrow s(2) = 20 - 5.2 = 10m$$

$$t = 3s \Rightarrow s(3) = 20 - 5.3 = 5m$$

$$t = 4s \Rightarrow s(4) = 20 - 5.4 = 0$$

$$t = 5s \Rightarrow s(5) = 20 - 5.5 = -5m$$



2) $s(t) = 2 + 4t - t^2$ (SI):

$$t = 0 \Rightarrow s(0) = 2 + 4.0 - 0^2 = 2m$$

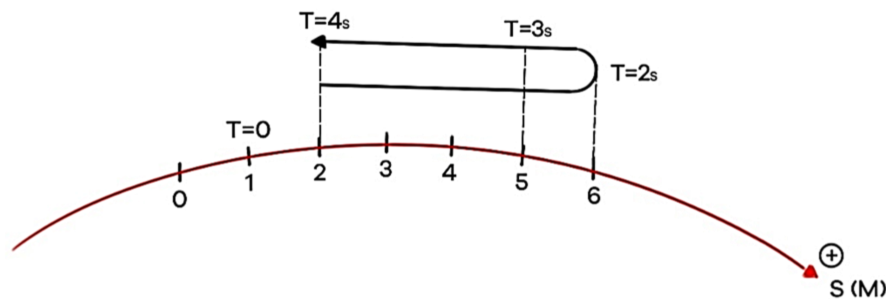
$$t = 1s \Rightarrow s(1) = 2 + 4.1 - 1^2 = 5m$$

$$t = 2s \Rightarrow s(2) = 2 + 4.2 - 2^2 = 6m$$

$$t = 3s \Rightarrow s(3) = 2 + 4.3 - 3^2 = 5m$$

$$t = 4s \Rightarrow s(4) = 2 + 4.4 - 4^2 = 2m$$





Observe que $t = 0$ é chamado de origem dos tempos, definindo o momento do disparo do cronômetro do observador.

Se não conhecemos a função horária e conhecemos o espaço para cada instante de tempo, podemos determinar a função horária e a partir dela determinar o espaço para outros instantes.

Exemplo: vamos supor a seguinte relação de tempo e de espaço:

Tempo (s)	Espaço (m)
0	10
1	9
2	8
3	7

De acordo com os dados fornecidos, podemos concluir que a função horária do espaço é definida por:

$$s(t) = 10 - t$$

Neste momento, não estamos preocupados na matemática para chegar nesse resultado, apenas nos conceitos físicos. Futuramente, desenvolveremos todos os cálculos detalhadamente, mas não é difícil verificar que a relação do espaço-tempo é dada por aquela função do primeiro grau.

Se quisermos saber em qual instante corresponde ao $s = 1m$, basta resolvermos a seguinte equação:

$$s(t) = 1 \Rightarrow 10 - t = 1 \Rightarrow t = 9s$$



7.7. Variação de espaço e distância percorrida

Um erro comum entre os alunos é misturar os conceitos de *Variação de Espaço* e *Distância Percorrida*. Vejamos, de início, a definição de Variação de Espaço.

7.7.1. Variação do espaço

Seja s_1 o espaço de um móvel num instante t_1 e s_2 seu espaço num instante t_2. A variação do espaço (Δs) num intervalo de tempo $\Delta t = t_2 - t_1$, é definido como:

$$\Delta s = s_2 - s_1$$

Observações:

- Se $s_2 > s_1$, então $\Delta s > 0$ e dizemos que o móvel se movimenta no sentido positivo da trajetória, aumentando o seu espaço.

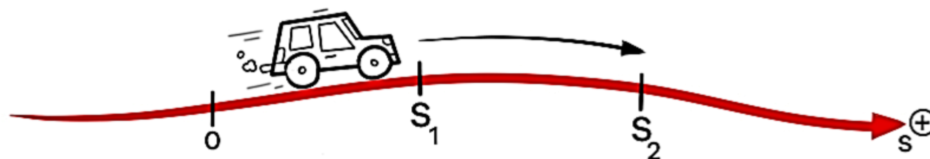


Figura 33: Se $s_2 > s_1$, então $\Delta s > 0$

- Se $s_2 < s_1$, então $\Delta s < 0$ e dizemos que o móvel se movimenta no sentido negativo da trajetória, diminuindo seu espaço.

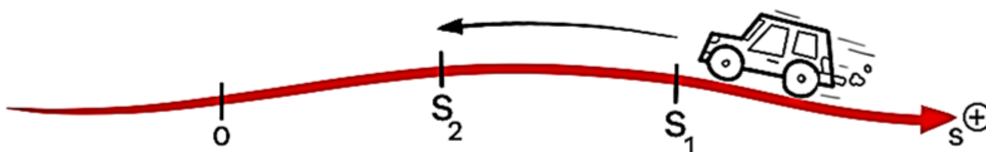


Figura 34: Se $s_2 < s_1$, então $\Delta s < 0$

- Se $s_2 = s_1$, então $\Delta s = 0$, isto é, o corpo não se move ao longo da trajetória.

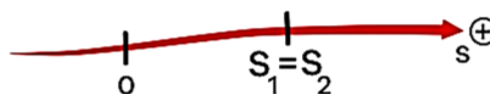


Figura 35: Se $\boldsymbol{s_2} = \boldsymbol{s_1}$, então $\boldsymbol{\Delta s} = \mathbf{0}$

Observação: em Física, usamos a letra grega maiúscula delta ($\boldsymbol{\Delta}$), seguida de uma grandeza, para indicar a variação dessa, isto é, fazer a diferença entre os valores finais e iniciais desta grandeza.

7.7.2. Distância percorrida

Definimos a distância percorrida por um móvel como a soma dos módulos das variações de espaço em cada sentido do movimento.

Vamos tomar um exemplo para ilustrar essa definição: um corpo vai de $s_1 = 20\ km$ até $s_2 = 80km$ e depois retorna a $s_3 = 40km$, assim temos que:



$$t_1 \to t_2: \Delta s_{1\to2} = s_2 - s_1 = 80 - 20 = 60km$$

$$t_2 \to t_3: \Delta s_{2\to3} = s_3 - s_2 = 40 - 80 = -40km$$

$$t_1 \to t_3: \Delta s_{1\to3} = s_3 - s_1 = 40 - 20 = 20km$$

Note que $\Delta s_{1\to3} = s_3 - s_1 = s_3 - s_2 + s_2 - s_1 = \Delta s_{1\to2} + \Delta s_{2\to3} = 60 + (-40) = 20km$

A partir da definição, temos que a distância percorrida é:

$$d = |\Delta s_{1\to2}| + |\Delta s_{2\to3}| = |60| + |-40| = 60 + 40 = 100km$$

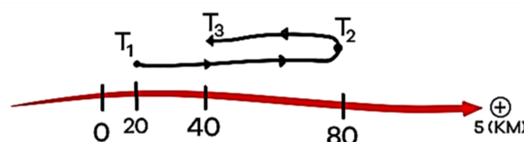
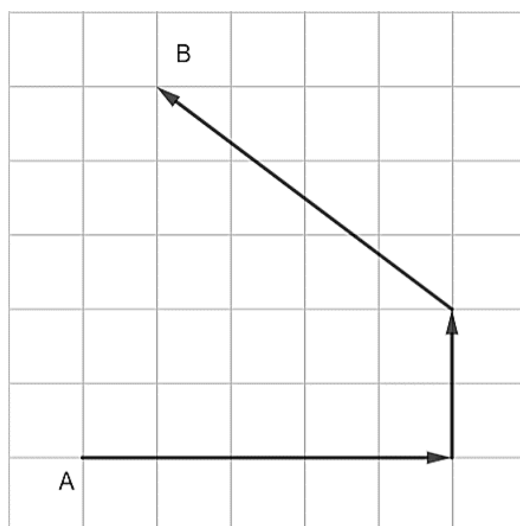


Figura 36: Diferença entre distância percorrida e variação de espaço.



4)

Uma pessoa parte da posição A e atinge a posição B percorrendo a trajetória indicada na figura. O lado de cada quadradinho representa uma distância de 100m. Qual a distância, em quilômetros, que a pessoa percorre? Qual foi o módulo da variação de espaço da pessoa?



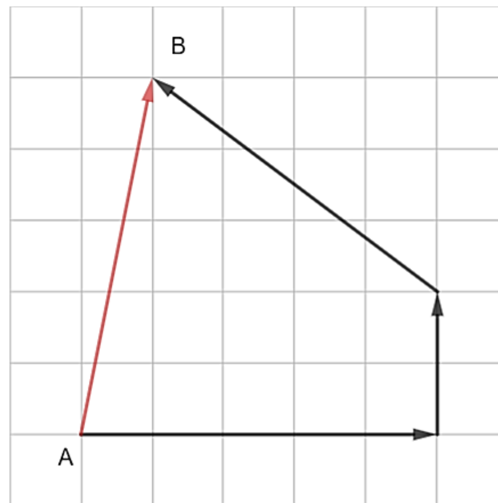
Comentários:

Para calcular a distância percorrida, devemos calcular o módulo do deslocamento de cada trecho. Primeiro trecho são 5 quadradrinhos, logo, ele se deslocará $5 \ x \ 100 = 500m$. Em seguida, ela desloca-se 2 quadradinhos para a vertical. Então, ela desloca $2 \ x \ 100 = 200m$.

Finalmente, ela faz um deslocamento inclinado, formando a hipotenusa de um triângulo retângulo. Logo, pelo teorema de Pitágoras, temos: $a^2 = 3^2 + 4^2 = 25 \Rightarrow a = 5$. Esse triângulo é famoso e seus semelhantes também.

Logo, nesse trecho a pessoa andou $5 \ x \ 100 = 500m$. Portanto, a distância percorrida (d) pela pessoa foi $d = 500 + 200 + 500 = 1200m \Rightarrow d = 1{,}2km$. Para calcularmos a variação de espaço da pessoa, devemos pegar o módulo da variação de espaço entre A e B, isto é, $\Delta s_{A\to B} = s_b - s_a$. Dado que eles não estão no mesmo plano, precisamos fazer um tratamento vetorial.

Mas, como estamos apenas preocupados com o $|\Delta\vec{s}_{A\to B}|$, precisamos apenas calcular a hipotenusa do triângulo abaixo:



Pelo teorema de Pitágoras, temos que:

$$|\Delta\vec{s}_{A\to B}|^2 = 1^2 + 5^2 = 26$$

$$\Rightarrow |\Delta\vec{s}_{A\to B}| = \sqrt{26}$$

Como cada quadradinho vale 100 metros, portanto o módulo da variação de espaço da pessoa foi de $100\sqrt{26}m$.

7.8. Relação entre m/s e km/h

Diante da relação entre metros e quilômetros, segundos e horas, pode-se escrever uma relação entre as unidades e isto é fundamental para resolução de questões dos vestibulares, pois é comum misturar as unidades. Vamos ver como transformar as unidades:

$$1\frac{km}{h} = \frac{1000m}{3600s} = \frac{1}{3{,}6}\frac{m}{s} \ ou \ 1\frac{m}{s} = 3{,}6\frac{km}{h}$$

Diante desse resultado, notamos que cada $1m/s$ corresponde a $3{,}6km/h$. Portanto:

$$\boxed{\frac{m}{s} \Rightarrow \frac{km}{h}} \Rightarrow \times \ 3{,}6$$

$$\boxed{\frac{km}{h} \Rightarrow \frac{m}{s}} \Rightarrow \div \ 3{,}6$$

Exemplos:

$$10m/s = 10 \ x \ 3{,}6km/h = 36km/h;$$

$$72km/h = 72/3{,}6 = 20m/s.$$



7.9. Velocidade média

Considerando a variação de espaço de um ponto material dada por $\Delta s = s_2 - s_1$, durante o intervalo de tempo $\Delta t = t_2 - t_1$, efine-se velocidade média (v_m), no intervalo de tempo Δt, como o quociente entre a variação de espaço e o correspondente intervalo de tempo:

$$\boxed{v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}}$$

Nota-se que Δt é sempre positivo. Por isso, concluímos que o sinal de v_m é o mesmo de Δs:

- Se $\Delta s > 0 \Rightarrow v_m > 0$;
- Se $\Delta s < 0 \Rightarrow v_m < 0$;
- Se $\Delta s = 0 \Rightarrow v_m = 0$.

No SI, a unidade de velocidade é o metro por segundo (m/s). Geralmente, surge a necessidade de transformar a unidade de cm/s ou km/h para m/s, conforme a relação vista no item anterior.

Observação: é muito comum os livros de ensino médio no Brasil trazer o termo **velocidade escalar média**, mas cuidado, velocidade é sempre um vetor. Quando as provas trazem esse nome velocidade escalar média, eles se referem ao termo **rapidez** (distância percorrida pelo intervalo de tempo). Alguns livros já começaram a abandonar esse termo velocidade escalar média.

Velocidade média é definida pela variação da posição em relação ao tempo. Lembra que vimos a diferença entre distância percorrida e variação de espaço? Muitas vezes, o interesse é pensar na rapidez com que um carro da Nascar que faz uma trajetória oval retornando ao ponto de origem, por exemplo. Perceba que nesse caso a velocidade média por definição, após dar uma volta, é igual a zero já que o espaço final é igual ao espaço inicial.

Por isso, para trabalhar com a ideia de rapidez no movimento, é definida a grandeza rapidez média como sendo:

$$rapidez = \frac{d}{\Delta t}$$

Em que d é a distância percorrida no referido intervalo de tempo.

Naturalmente, carregamos desde cedo a noção de velocidade média. Por exemplo, em uma viagem, quando um móvel percorre 200 km em 2 horas, rapidamente dizemos que ele percorreu, em média, 100 km a cada hora. Assim, afirmamos que a velocidade média foi de $100 km/h$. Note que não podemos afirmar que necessariamente o móvel percorreu nessa velocidade durante o deslocamento. Ele pode ter andado 110 km na primeira hora e 90 km na segunda hora, mas, na *média*, ele andou 100 km a cada hora.

Dessa forma, surge, naturalmente, a vontade de determinar essa velocidade a cada instante e para isso, precisa-se de uma ferramenta matemática mais forte: a derivada. No nosso curso não faremos um curso rigoroso de Cálculo, apenas daremos uma noção que é importante para chegarmos mais forte em Física para a prova.



Entretanto, daremos apenas umas regrinhas e macetes de como aplicar. A derivada aplicada a cinemática é apenas uma ferramenta a mais para resolução de questões, mas não é uma necessidade. Vamos introduzir a derivada junto com o conceito de velocidade instantânea no próximo item.



5)

Em um prédio de 20 andares (além do térreo) o elevador leva 36 s para ir do térreo ao 20º andar. Uma pessoa no andar X chama o elevador, que está inicialmente no térreo, e 39,6 s após a chamada a pessoa atinge o andar térreo. Se não houve paradas intermediárias, e os tempos de abertura e fechamento da porta do elevador e de entrada e saída do passageiro são desprezíveis, podemos dizer que o andar X é o:

a) 9º. b) 11º. c) 16º. d) 18º. e) 19º.

Comentários:

Podemos definir a velocidade do elevador como sendo a razão entre o número de andares pelo tempo:

$$v_m = \frac{nº\ andares}{tempo}$$

Logo, a velocidade média desse elevador será:

$$v_m = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}\frac{andares}{s}$$

O elevador gastou 39,6 segundos para chegar até o andar dele e voltar para o térreo. Como o módulo da velocidade do elevador é constante, podemos dizer que o mesmo tempo que ele leva para subir ele leva para descer. Logo, o elevador levou metade do tempo para subir, isto é, gastou 19,8 segundos.

Portanto, o número de andares que ele andou para subir foi:

$$\frac{5}{9} = \frac{nº\ andares}{19{,}8} \Rightarrow nº\ andares = 11$$

Portanto, a pessoa estava no 11º andar.

Gabarito B.

6)

Num caminhão-tanque em movimento, uma torneira mal fechada goteja à razão de duas gotas por segundo. Determine a velocidade do caminhão, sabendo que a distância entre marcas sucessivas deixadas pelas gotas no asfalto é de 2,5m.

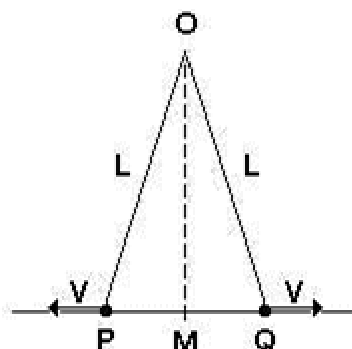
Comentários:



O caminhão deixa cair 2 gosta a cada 1s, logo, 1 gota a cada 0,5s. Portanto o intervalo de tempo entre duas gotas é de 0,5s. Dessa forma, a velocidade do caminhão pode ser calculada a partir das distâncias entre duas gotas, já que a gota sai com a mesma velocidade horizontal do caminhão. Logo, $v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{2,5}{0,5} = 5m/s$.

7)

Considere a escada de abrir. Os pés P e Q se movem com velocidade constante, v.



O intervalo de tempo decorrido, desde o início da abertura, para que o triângulo POQ se torne equilátero será:

a) $\frac{L}{v}$ b) $\frac{L}{2v}$ c) $\frac{2L}{\sqrt{3}v}$ d) $\frac{L}{4v}$ e) $\frac{2L}{v}$

Comentários:

A escada inicialmente está fechada e vai abrir com velocidade constante na direção horizontal até se tornar um triângulo equilátero. Vamos analisar o ponto Q. Precisamos lembrar que um triângulo equilátero possui todos os lados iguais e o segmento OM divide o lado PQ ao meio.

Dessa forma, se colocarmos a origem do movimento no ponto M, temos que seu s_0 está em M e depois seu s_1 estará a uma distância $\frac{L}{2}$ do ponto M, pois o triângulo se tornou um triângulo equilátero. Logo, seu $\Delta s = \frac{L}{2}$. Assim:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} \Rightarrow v = \frac{\frac{L}{2}}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{L}{2v}$$

Gabarito B.

8)

Dirigindo-se a uma cidade próxima, por uma autoestrada plana, um motorista estima seu tempo de viagem, considerando que consiga manter uma velocidade média de $90km/h$. Ao ser surpreendido pela chuva, decide reduzir sua velocidade média para $60Km/h$, permanecendo assim até a chuva parar, quinze minutos mais tarde, quando retoma sua velocidade média inicial. Essa redução temporária aumenta seu tempo de viagem, com relação à estimativa inicial, em:

a) 5 min b) 7,5 min c) 10 min d) 15 min e) 30 min

Comentários:

Inicialmente, o móvel iria a $90 km/h$, mas durante um intervalo de tempo de 15 min (que corresponde a ¼ de hora), ele anda a 60 km/h por causa da chuva. Então para ver a diferença de tempo causado por essa chuva, basta vermos quanto ele andou durante esse tempo e calcular quanto seria o tempo caso ele não tivesse esse imprevisto. Dessa forma, temos que:

Deslocamento durante o intervalo de chuva:

$$v_{chuva} = \frac{\Delta s_{chuva}}{\Delta t_{chuva}} \Rightarrow 60 = \frac{\Delta s_{chuva}}{1/4} \Rightarrow \Delta s_{chuva} = 60.\frac{1}{4} = 15\ km$$

Tempo para deslocar 15 km sem chuva:

$$v_{normal} = \frac{\Delta s_{chuva}}{\Delta t_{normal}} \Rightarrow 90 = \frac{15}{\Delta \mathrm{t}_{\mathrm{normal}}} \Rightarrow \Delta t_{normal} = \frac{15}{90} = \frac{1}{6} h = 10\ min$$

Logo, a diferença dos tempos é de 5 min.

Gabarito A.

Observação: Nesta questão, a Fuvest não foi mencionou o tempo de desaceleração (quando ele sai de 90 km/h para 60 km/h) e o tempo de aceleração do móvel (quando o móvel volta para 90 km/h), simplificando a questão.



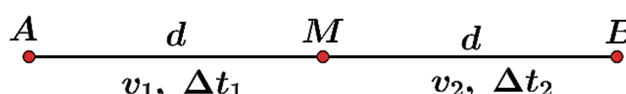
9)

Um automóvel faz a metade do seu percurso com velocidade média igual a 40 km/h e o restante com velocidade média de 60 km/h. Determine a velocidade média do carro no percurso total.

Comentários:

Em primeiro momento, muitos alunos pensam em fazer a média aritmética das velocidades, mas veremos que não é a média aritmética das velocidades e, sim, a média harmônica.

Para resolver essa questão, vamos considerar que todo o percurso seja de $2d$ (isso é um truque para evitar frações), sendo que na primeira metade (d) ele anda a uma velocidade v_1, gastando um tempo Δt_1. Na segunda metade (d também) ele anda a uma velocidade v_2, gastando um tempo Δt_2.



Sendo assim, ele anda uma distância total 2d e cada trecho ele anda a uma velocidade, logo, gastará tempos distintos, de maneira que o tempo total é a soma dos tempos.

Logo, temos que:

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{2d}{\Delta t_1 + \Delta t_2}$$

Mas, precisamos conhecer uma relação entre as distâncias e os tempos. Para isso, vamos calcular quanto o móvel gasta em cada metade, já que ele está com velocidades distintas em cada trecho.



Tempo para a primeira metade:

$$v_1 = \frac{\Delta s_1}{\Delta t_1} \Rightarrow \Delta t_1 = \frac{d}{v_1}$$

Tempo para a segunda metade:

$$v_2 = \frac{\Delta s_2}{\Delta t_2} \Rightarrow \Delta t_2 = \frac{d}{v_2}$$

Assim, podemos substituir os tempos na equação da velocidade média:

$$v_m = \frac{2d}{\frac{d}{v_1} + \frac{d}{v_2}}$$

$$\Rightarrow v_m = \frac{2d}{d\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}\right)}$$

$$\Rightarrow \boxed{v_m = \frac{2}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}}}$$

Observação: quando temos dois termos a e b, diferentes de zero e fazemos a operação matemática $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$, nós estamos calculando a média harmônica de a e b.

Para a questão, substituindo os valores das velocidades v_1 e v_2, temos:

$$v_m = \frac{2}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}} \Rightarrow v_m = \frac{2}{\frac{1}{40} + \frac{1}{60}} = \frac{2.40.60}{40 + 60} = \frac{2.40.60}{100}$$

$$\therefore \boxed{v_m = 48\ km/h}$$

Gabarito $48\ km/h$.



Nesse momento, provamos que quando um móvel percorre um percurso reto em único sentido que está dividido em n partes iguais com velocidades diferentes, a velocidade média do percurso total será a média harmônica das velocidades.

Dessa forma, se você tem o seguinte problema: um móvel percorre o primeiro terço de movimento com velocidade v_1, o segundo terço com velocidade v_2 e o último com velocidade v_3, então a velocidade média em todo o percurso será dada pela média harmônica das velocidades. Logo:

$$v_m = \frac{3}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3}}$$

Se for dividido em n partes iguais, com as respectivas velocidades $v_1, v_2, \dots, v_n$, então a velocidade média ao final de todo percurso é dada por:



$$v_m = \frac{n}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \cdots + \frac{1}{v_n}}$$

Vale lembrar as principais médias da matemática:

Média aritmética simples de n termos:

$$M_A = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

Média aritmética ponderada de n termos, conhecendo os pesos $(\alpha, \beta, \ldots \theta)$:

$$M_P = \frac{\alpha . a_1 + \beta . a_2 + \cdots \theta . a_n}{\alpha + \beta + \cdots \theta}$$

Média geométrica de n termos:

$$M_G = \sqrt[n]{a_1 . a_2 \ldots . a_n}$$

Média harmônica de n termos:

$$M_H = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}$$

10)

Quatro cidades, A, B, C e D, estão dispostas de tal forma que as distancias rodoviárias entre A e B, B e C, e C e D são, respectivamente, AB = 60 km, BC = 100 km e CD = 90 km. Se um automóvel vai de A até B a uma velocidade escalar média de 60 km/h, da cidade B até C a uma velocidade escalar média de 50 km/h e de C até D a uma velocidade escalar média de 45 km/h, determine a velocidade média desse automóvel, em km/h, para o percurso de A até D.

Comentários:

Semelhante ao método aplicado na questão anterior, vamos calcular o tempo de cada trecho:

Tempo de AB:

$$\Delta t_{AB} = \frac{\Delta s_{AB}}{v_{AB}} = \frac{60}{60} = 1\ h$$

Tempo de BC:

$$\Delta t_{BC} = \frac{\Delta s_{BC}}{v_{BC}} = \frac{100}{50} = 2\ h$$

Tempo de CD:

$$\Delta t_{CD} = \frac{\Delta s_{CD}}{v_{CD}} = \frac{90}{45} = 2\ h$$

Dessa forma, o tempo total é $\Delta t_T = 1 + 2 + 2 = 5\ h$. Portanto:

$$v_m = \frac{\Delta s_T}{\Delta t_T} = \frac{60 + 100 + 90}{5} = 50\ km/h$$

Gabarito $50\ km/h$.





7.10. Velocidade instantânea

Como vimos anteriormente, a velocidade média informa uma ideia geral do móvel ao longo de todo movimento. Se um móvel tem uma velocidade de 100 km/h, isso não implica dizer que ele andou nessa velocidade em cada instante. Nós apenas estamos dizendo que, em média, o automóvel andou 100 km a cada hora.

É comum, entretanto, estarmos interessados na velocidade em cada instante. Para isso, definiremos o conceito de *velocidade instantânea*.

Vamos analisar o seguinte exemplo: imagine que dois agentes de trânsito são encarregados de medir a velocidade com que os motoristas trafegam em uma avenida.

Colocamos os dois agentes separados, inicialmente, com um Δs e quando o carro passa pelo primeiro, esse dispara o cronômetro e quando ele passa pelo segundo agente, o cronômetro é pausado. Definida a variação de espaço Δs e a variação de tempo Δt, podemos calcular a velocidade média do carro, mas essa velocidade pode não ser condizente com a maior velocidade atingida pelo condutor.

O condutor pode ter visto de longe o segundo agente e freou o carro, fazendo uma velocidade mais alta no primeiro trecho e uma velocidade bem mais baixa no segundo trecho. Isso é possível porque a distância entre os agentes é grande. Para tirar essa possibilidade de frenagem, nos aproximamos os dois agentes.

Com isso, diminuirá também o intervalo de tempo gasto pelo motorista. E quando os agentes fizerem a razão $\frac{\Delta s}{\Delta t}$, essa velocidade tenderá ao real valor do motorista naquele instante.

Cada vez que o segundo agente se aproximar do primeiro, os registros de intervalos de tempos serão menores e mais próximo se estará da velocidade no instante em que o móvel passa pelo primeiro agente.

Dessa forma, fazendo uma abstração matemática, dizemos que quando o intervalo de tempo do móvel, para percorrer a variação de espaço, tende a zero, nós estamos aproximando a velocidade média da velocidade instantânea. Na linguagem matemática, dizemos que:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} v_m \Rightarrow \boxed{v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}}$$

Ao limite de $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ quando Δt tende a zero recebe o nome de derivada do espaço em relação ao tempo e indica-se por $\frac{ds}{dt}$. Dessa forma, podemos reescrever a equação da velocidade instantânea como:

$$\boxed{v = \frac{ds}{dt}}$$

Escrever $\frac{ds}{dt}$ é apenas uma representação matemática da derivada, não podemos confundir com a álgebra e fazer $\frac{ds}{dt} = \frac{s}{t}$ já que existe d em cima e em baixo. Não é isso o significado de derivada.

A derivada é uma operação matemática e devem ser respeitadas as suas regras. Vamos fazer alguns exercícios para ilustrar um pouco mais.

Exemplos:

1) Seja a equação horária do espaço $s = 4t^2$ (SI). Calculemos a velocidade instantânea para esse móvel. Para isso, devemos tomar dois instantes quaisquer e fazemos:

$$\text{Primeiro instante } t \to s = 4t^2 \qquad (1)$$

$$\text{Segundo instante } t + \Delta t \to s + \Delta s = 4(t + \Delta t)^2 \qquad (2)$$

Ao fazermos (2) – (1), vem:

$$\Delta s = 4[(t + \Delta t)^2 - t^2] = 4(\mathrm{t} + \Delta \mathrm{t} - \mathrm{t})(\mathrm{t} + \Delta \mathrm{t} + \mathrm{t}) = 4(\Delta \mathrm{t})(\Delta \mathrm{t} + 2\mathrm{t})$$

Podemos passar o Δt dividindo o Δs: $\frac{\Delta s}{\Delta t} = 4(\Delta t + 2t) = 4\Delta t + 8t$

Assim, podemos calcular a velocidade instantânea de acordo com a definição:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} (4\Delta t + 8t)$$

Como Δt tende a zero, no limite temos que ele é zero. Logo, temos que: $v = 8t$ (SI).

Dessa forma, dizemos que a derivada de s em relação ao tempo t, para a dada função $s = 4t^2$ é $v = 8t$. Podemos afirmar ainda que a velocidade está variando com o tempo, segunda essa função $v(t) = 8t$. Nós chamamos $v(t)$ de função horária da velocidade.

Analisando com mais cuidado o processo matemático realizado e o resultado obtido, podemos ver que ao derivarmos $s = 4t^2$ nós multiplicamos o expoente (que no caso é 2) pelo coeficiente de t^2 e diminuímos o expoente de t^2 de uma unidade:

$$s = 4t^2$$

$$\Rightarrow v = \frac{ds}{dt} = 2.4t^{2-1} = 8t$$

Esse processo é conhecido como regra do "tombo" para a derivada de uma função polinomial. Generalizando:

Se $s = m.t^n \Rightarrow \mathrm{v} = \frac{\mathrm{ds}}{\mathrm{dt}} = n.m.t^{n-1}$.

Observação: se um móvel está parado, sua posição não varia com o tempo, logo dizemos que $s = C$, onde C representa um número constante. Neste caso, $\Delta s = 0$ em qualquer intervalo de tempo e, portanto, ao aplicar a definição de velocidade instantânea, vemos que $v = \frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = 0$. Resultado já esperado, pois, o móvel está parado. De fato, da matemática, a derivada de uma constante é nula.



2) Vamos calcular a velocidade instantânea para a seguinte função horária do espaço $s(t) = 6 + 4t + 3t^2$ (SI).

Aplicando a regra do tombo para cada parte da função $s(t)$:

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = 0 + 1.4.t^{1-1} + 2.3.t^{2-1} = 4 + 6t \text{ (SI)}$$

$$s = 5t^4 \qquad \text{(SI)}$$

$$v = \frac{ds}{dt} = 4.5.t^{4-1} = 20t^3 \qquad \text{(SI).}$$

A aplicação de derivada para esses casos de funções horárias do espaço que, matematicamente representadas por funções polinomiais, são relativamente tranquilas e sua aplicação nos faz chegar rapidamente à função horária da velocidade.



11)

Um ponto material está animado de um movimento cuja equação horária do espaço, em unidades do SI, é dada por: $s = 4t^2 + 2t + 2$. Qual a intensidade da velocidade no instante $t = 3s$?

Comentários:

Aplicando o conceito de derivada, utilizando a regra do tombo, temos que:

$$v = \frac{ds}{dt} = 2.4.t^{2-1} + 1.2.t^{1-1} + 0 = 8t + 2$$

$$\Rightarrow v(t) = 8t + 2$$

Para $t = 3s$ temos que: $v(3) = 8.3 + 2 = 26\, m/s$.

12)

Sendo $s = 5 - 5t + t^2$ a equação horária do espaço, em unidades SI, pede-se o instante em que a velocidade se anula.

Comentários:

Aplicando o conceito de derivada, utilizando a regra do tombo, temos que:

$$v = \frac{ds}{dt} = 0 - 1.5.t^{1-1} + 2.1.t^{2-1}$$

$$\Rightarrow v(t) = 2t - 5$$

Quando a velocidade se torna nula, temos que:

$$v(t) = 0$$



$$\Rightarrow 2t - 5 = 0$$

$$\therefore \boxed{t = 2{,}5\ s}$$

7.11. Movimento progressivo e retrógrado

Chamamos de *movimento progressivo* quando um móvel se desloca no sentido da orientação positiva da trajetória. Nesse caso, $\Delta s > 0$ e podemos verificar que os espaços crescem com o decorrer do tempo. Além disso, como $\Delta s > 0$ temos que $v > 0$, isto é, em qualquer intervalo de tempo a velocidade é sempre positiva.

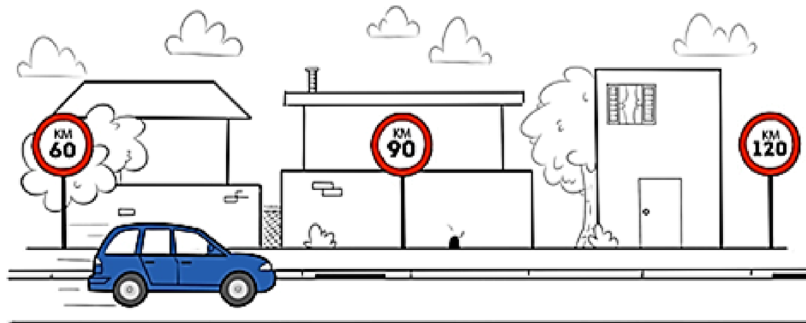


Figura 37: Movimento progressivo: Δs > 0 e v > 0.

Por outro lado, chamamos de *movimento retrógrado* quando um móvel se desloca no sentido contrário ao da orientação. Nesse caso, $\Delta s < 0$ e podemos verificar que os espaços decrescem com o decorrer do tempo. Além disso, como $\Delta s < 0$ temos que $v < 0$, isto é, em qualquer intervalo de tempo a velocidade é sempre negativa.

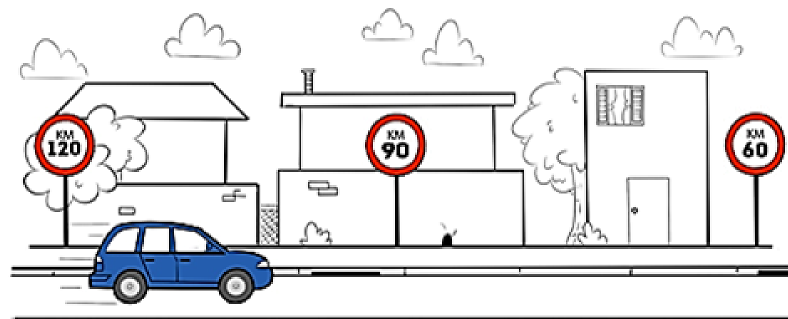


Figura 38: Movimento retrógrado: $\boldsymbol{\Delta s} < \mathbf{0}$ e $\boldsymbol{v} < \mathbf{0}$.

ESCLARECENDO!



13)

Para quais valores de tempo o movimento descrito pela partícula, onde a trajetória é dada por $s(t) = 4 + 6t - 2t^2$, será progressivo? E retrógrado?

Comentários:

Utilizando o conceito de derivada e aplicando a regra do tombo, temos que:



$$v = \frac{ds}{dt} = 0 + 1.6.t^{1-1} - 2.2.t^{2-1}$$

$$\Rightarrow v(t) = 6 - 4t$$

Para o caso de movimento progressivo, temos que:

$$v > 0$$

$$\Rightarrow 6 - 4t > 0$$

$$\Rightarrow 4t < 6 \Rightarrow t < 1{,}5\ s$$

Para o caso de movimento retrógrado, temos que:

$$v < 0$$

$$\Rightarrow 6 - 4t < 0$$

$$\Rightarrow 4t > 6$$

$$\Rightarrow t > 1{,}5\ s$$

Para o caso de $t = 1{,}5\ s$, a velocidade da partícula será nula, pois: $v(1{,}5) = 6 - 4.1{,}5 = 0$.

8. Movimento retilíneo uniforme (MRU)

8.1. Definição

Caracteriza-se como movimento uniforme aquele que possui velocidade de módulo constante e diferente de zero, isto é,

$$\boxed{v_m = v = \frac{\Delta s}{\Delta t}}, v \neq 0$$

De outra forma, podemos dizer que:

$$\Delta s = v \cdot \Delta t$$

Escrevendo dessa forma, podemos ver que a variação do espaço (Δs) é diretamente proporcional ao intervalo de tempo correspondente (Δt). Além disso, vemos que Δs varia linearmente com Δt. Portanto, para intervalos de tempos iguais, as variações de espaços também são iguais, como mostra a figura abaixo:

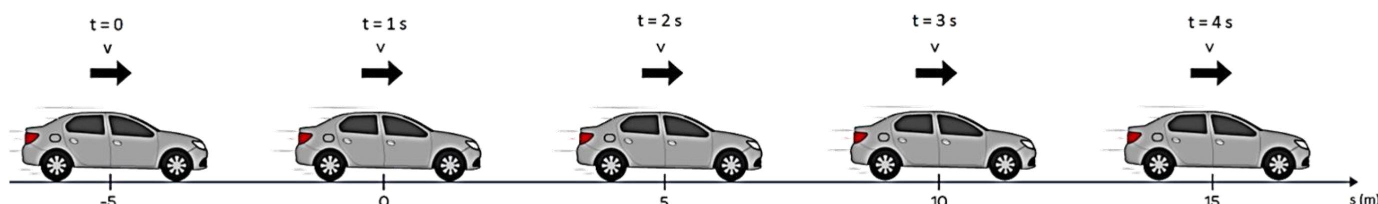


Figura 39: Carro realizando um MRU.



Quando o movimento uniforme for em uma reta, chamamos de MRU – Movimento Retilíneo Uniforme. Quando o movimento uniforme for em uma circunferência, chamamos de MCU – Movimento Circular Uniforme.

Lembrete: velocidade é uma grandeza vetorial!

8.2. Função horária do espaço

Definido o espaço inicial como s_0 correspondente ao instante t_0, para um instante t temos que o espaço será s, com $\Delta t = t - t_0$ e $\Delta s = s - s_0$.

A partir de $\Delta s = v.\Delta t$, concluímos que:

$$s - s_0 = v(t - t_0)$$

$$\Rightarrow \boxed{s = s_0 + v(t - t_0)}$$

Geralmente, adotamos como tempo inicial $t_0 = 0$, quando zeramos cronômetro e passamos a contar o tempo a partir do zero. Dessa forma, a função do espaço para o MRU se reduz a:

$$\boxed{s = s_0 + vt}$$

Isto é, a função horária do espaço é uma função do primeiro grau em t.

A principal característica do movimento retilíneo uniforme é fato da velocidade escalar ser constante, isto é, a aceleração escalar é nula.

Para verificar se um movimento é MRU, devemos observar se o movimento respeita qualquer uma destas três características:

1) A velocidade escalar instantânea é constante: $v = v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}, v \neq 0$

2) O espaço obedece a uma função horária do primeiro grau em t: $s = s_0 + vt$

3) A aceleração escalar instantânea é nula: $a = a_m = 0$

8.3. Gráficos no MRU

Dado que a função horária do espaço é dada por $s = s_0 + vt$, então a função de $s(t)$ é uma função do primeiro grau, análoga a $f(x) = b + ax$. Então, dada a $s(t) = s_0 + vt$ temos que s_0 é o coeficiente linear da função e v é o coeficiente angular da função.

Da matemática, lembramos que o coeficiente linear caracteriza o ponto onde a função toca quando passa pelo eixo y. Já o coeficiente angular nos mostra a inclinação da reta, isto é, a taxa como cresce ou descreve a função.

8.3.1. Diagrama $s \times t$

Como definido anteriormente, no movimento progressivo $(v > 0)$ o espaço cresce $(\Delta s > 0)$ com o tempo e, no movimento retrógrado $(v < 0)$, o espaço decresce $(\Delta s < 0)$ com o tempo.

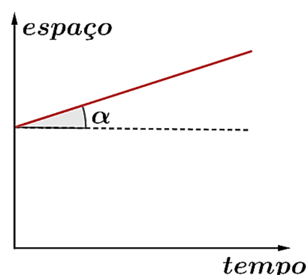


Figura 40: Gráfico sxt no MRU, com v>0.

Dado que $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ e, segundo a trigonometria, tangente é uma função que é definida pela razão do cateto oposto pelo cateto adjacente, temos que:

$$v \overset{N}{=} tg\alpha$$

Isto é, a tangente da inclinação da reta é igual numericamente a velocidade.

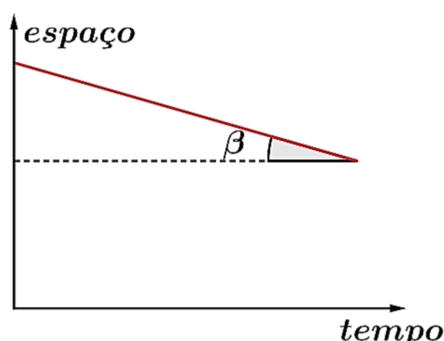


Figura 41: Gráfico sxt no MRU, com v<0.

Para o caso do movimento retrógrado, a $tg\beta \overset{N}{=} |v|$. Entretanto, temos que neste caso a velocidade é negativa, então, devemos lembrar de colocar o sinal de menos após calcular a tangente para de fato determinar a velocidade.

8.3.2. Diagrama $v \times t$

O MRU é caracterizado por ter velocidade constante, dessa forma, o módulo da velocidade não se altera com o decorrer do tempo. Logo a função da velocidade com o tempo é uma reta paralela ao eixo dos tempos.

Para o movimento progressivo temos $v > 0$, logo, a reta é paralela e está acima do eixo dos tempos. Para o movimento retrógrado temos $v < 0$, portanto, a reta é paralela e está abaixo do eixo dos tempos, conforme as figuras abaixo:

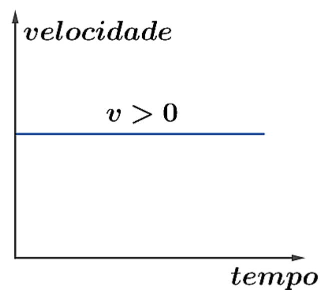


Figura 42: Gráfico vxt no MRU, com v>0.

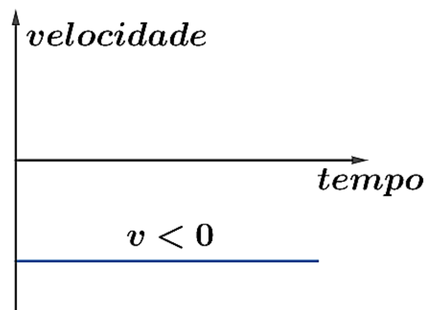


Figura 43: Gráfico vxt no MRU, com v<0.

Como dito anteriormente, neste movimento não existe aceleração, logo o gráfico da aceleração pelo tempo coincide com o eixo dos tempos.

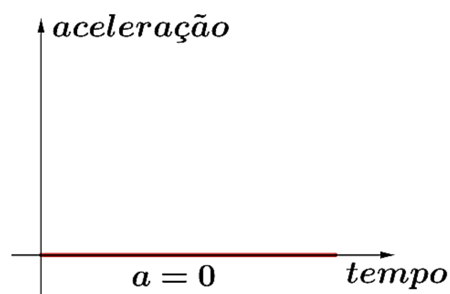


Figura 44: Gráfico axt no MRU.



14)

A função horária do espaço de um móvel é $s = 12 - 3t$, com s e t em unidades SI.

a) determine o espaço inicial e o módulo da velocidade do móvel.

b) classifique o movimento.

c) determine o espaço no instante $t = 2\ s$.

d) em que instante o móvel passa pela origem dos espaços?

e) faça o gráfico do espaço pelo tempo.

Comentários:

a) Vamos comparar a função dada com a função segundo a teoria:

$$\begin{cases} s = s_0 + vt \\ s = 12 - 3t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{s_0 = 12\ m}\ e\ \boxed{v = -3\ m/s}$$

b) O movimento é retrógrado, pois $v = -3\ m/s$, isto é, $v < 0$.

c) Para $t = 2\ s$, temos que:

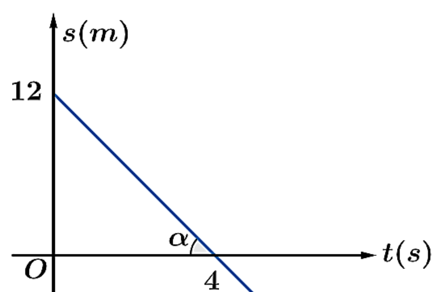
$$s(2) = 12 - 3.2 = 12 - 6$$

$$\Rightarrow \boxed{s(2) = 6\ m}$$

d) No momento em que o móvel passa pela origem dos espaços, o espaço do móvel é nulo, isto é, $s(t) = 0$. Portanto:

$$s(t) = 0 \Rightarrow 12 - 3t = 0 \Rightarrow \boxed{t = 4\ s}$$

e) Já conhecemos o espaço inicial (coeficiente linear), a velocidade (coeficiente angular) e ainda sabemos quando passamos pela origem dos espaços, então, temos que:



Notemos que $tg\alpha = \frac{12}{4} = 3$ e que $v \overset{N}{=} -tg\alpha = -3\ m/s$.

15)

Dois automóveis A e B percorrem uma mesma trajetória, com as seguintes funções horárias: $s_A = 20 + 60t$ e $s_B = 40 + 40t$. Onde o tempo é medido em horas e o espaço em quilômetros.

a) Determine o instante de encontro.

b) Qual a posição de encontro.

c) Em um mesmo gráfico, coloque a função horária de casa automóvel.

Comentários:

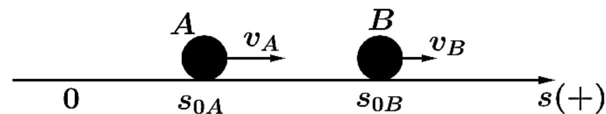
a) Quando falamos de encontro, dado que se trata de pontos materiais, a posição dos automóveis devem ser a mesma, isto é:

No instante do encontro, os espaços os móveis devem ser iguais. Logo:

$$s_A = s_B$$

$$\Rightarrow 20 + 60t = 40 + 40t \Rightarrow 20t = 20$$

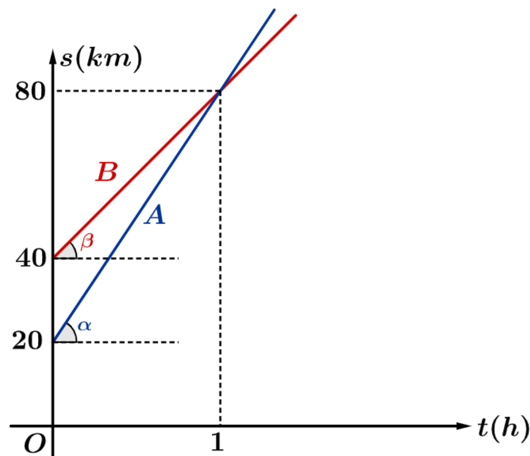
$$\Rightarrow \boxed{t = 1\ h}$$



b) Para encontrarmos a posição, basta substituir em uma das funções horárias:

$$s_A = 20 + 60.1 = 80\ km = s_B$$

c) Gráfico das funções horárias:



Observação 01: note que a inclinação α é maior que a inclinação β. Pela equação do espaço $s = s_0 + vt$, vemos que o coeficiente angular é justamente a velocidade. Da matemática, sabemos que o coeficiente angular é justamente a tangente da inclinação da reta. Assim, é esperado mesmo que a inclinação da reta de A seja maior que a inclinação da reta de B. Iremos explorar muito isso em análises gráficas.

Observação 02: este exercício pode ser resolvido pelo conceito de velocidade relativa (nós abordaremos mais desse assunto mais à frente). Vamos colocar o nosso referencial no automóvel mais a frente(B). Dessa forma, o automóvel B vê o automóvel se aproximar dele com velocidade, em valor absoluto, de $20km/h$ $(60km/h - 40km/h)$.

Tudo se passa como o móvel B estivesse parado. Assim, devemos pegar a distância relativa entre B e A também, pois, uma vez que parámos o móvel B, sua distância até o móvel A, em valor absoluto, é de $20\ km$ $(40\ km - 20\ km)$.

Dessa forma, poderíamos escrever a função horária do movimento relativo:

$$|\Delta s_{rel}| = |v_{rel}| \cdot \Delta t$$

Assim:

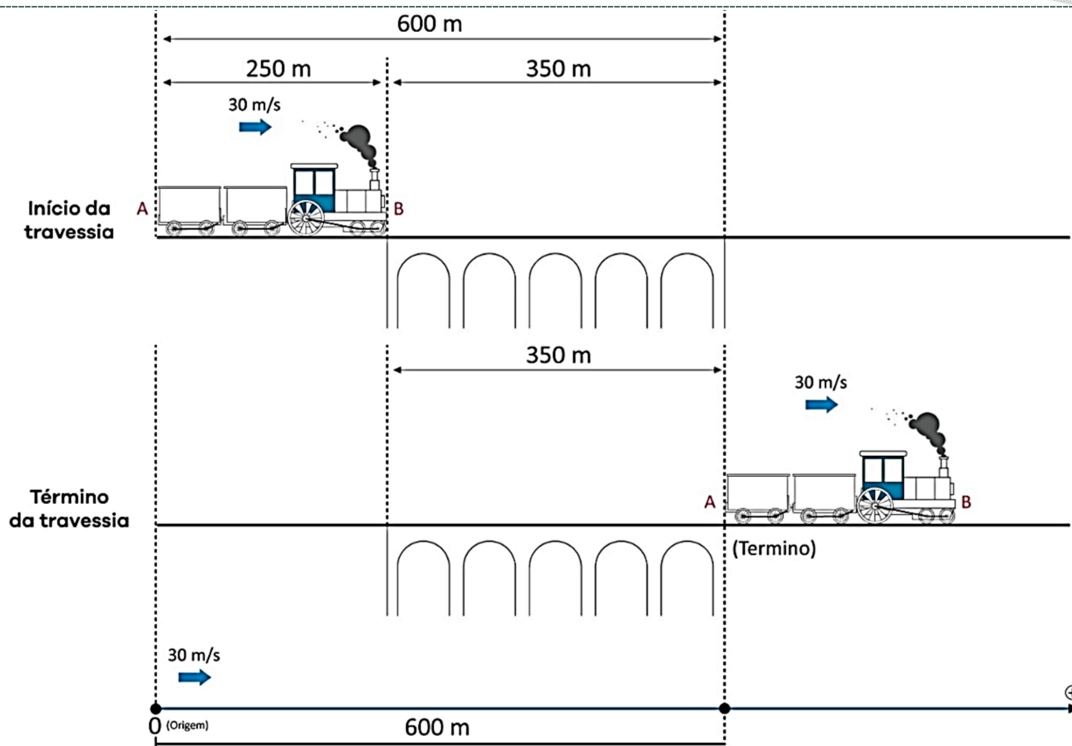
$$20 = 20.\Delta t \Rightarrow \boxed{\Delta t = 1\ h}$$

16)

Um trem de $250\ m$ de comprimento, com velocidade escalar constante de $108\ km/h$, atravessa uma ponte de $350\ m$ de comprimento. Em quanto tempo o trem demora na travessia?

Comentários:





Notamos que o início da travessia começa a ser contado ($t_0 = 0$), quando a frente do trem está no início da ponte e o término da travessia finaliza quando a traseira do trem está no limite de sai da ponte.

Portanto, tomando como $s_0 = 0$ a traseira do trem, quando ele terminar a travessia, sua traseira estará na posição $s = tamanho\ do\ trem + tamanho\ da\ ponte \Rightarrow s = 250 + 350 = 600\ m$. Assim, podemos escrever que:

$$s = s_0 + vt$$

$$\Rightarrow 600 = 0 + \frac{108}{3{,}6} . t$$

$$\Rightarrow \boxed{t = 20\ s}$$

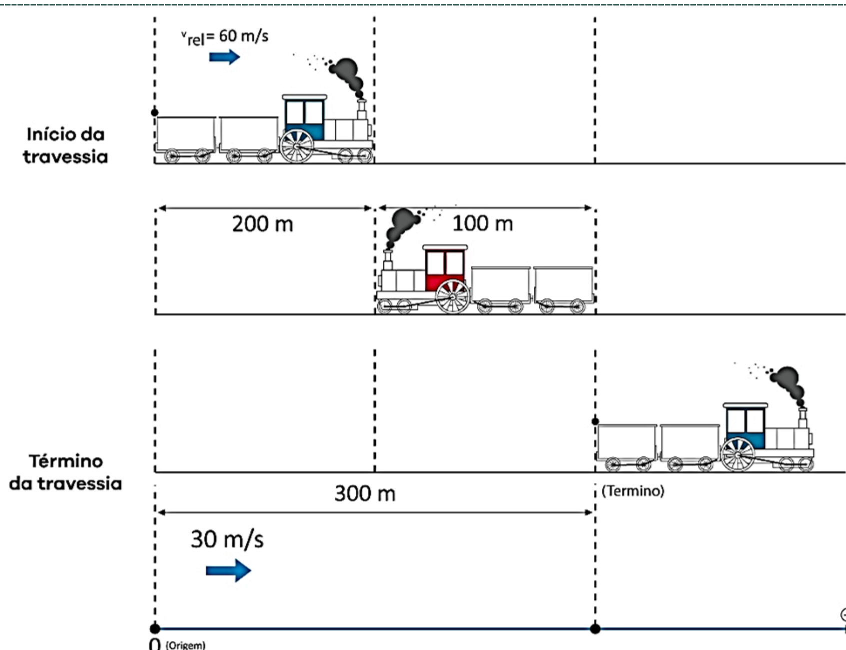
17) (Trens se aproximando)

Um trem de $200\ m$ de comprimento, com velocidade de $20\ m/s$, desloca-se de A para B enquanto um segundo trem de $100\ m$ de comprimento, desloca-se em uma linha paralela de B para A, com velocidade de $40\ m/s$.

Determine quanto tempo durará o cruzamento dos dois trens. Quanto que o trem B percorre durante o cruzamento, em relação a um referencial na Terra?

Comentários:





Vamos considerar como instante zero o momento quando as frentes dos dois trens estão na mesma posição. Neste instante, vamos considerar o segundo trem como nosso referencial e então, determinar a velocidade escalar de A em relação a B.

Para isso, imagino que você está no trem B, se você estivesse nele e parado, você estaria vendo o trem A se aproximando com a própria velocidade $20\ m/s$ mais a velocidade que o trem b deveria estar, isto é, você veria o trem A se aproximar com $20m/s\ + 40m/s = 60m/s$. Logo, a velocidade relativa de A em relação a B, dado nosso referencial de A para B é $v_{rel} = 60m/s$.

Para determinar a distância percorrida pelo trem A (o trem B está parado), notamos que a traseira do trem A deve passar pela traseira do caminhão B, ou seja, seu deslocamento relativo será:

$$\Delta s_{rel} = 200 + 100 = 300\ m$$

Portanto, o tempo de do cruzamento dos dois trens é dado por:

$$\Delta s_{rel} = v_{rel}.\Delta t$$

$$\Rightarrow \Delta t = \frac{300}{60}$$

$$\therefore \boxed{\Delta t = 5\ s}$$

Para determinarmos a distância percorrida por B, basta utilizarmos a definição de variação de espaço para o MRU, pois já sabemos quanto tempo durou o cruzamento dos trens:

$$\Delta s_B = v_B.\Delta t \Rightarrow \Delta s = 40.5 = 200\ m$$

18)

Um carro se aproxima, em vias paralelas, de um trem, num trecho retilíneo. Os dois realizam um MRU e as velocidades são v_{trem} e v_{carro}, com $v_{carro} > v_{trem}$. Dado que o trem tem um comprimento L e o carro pode ser considerado um ponto material, determine o tempo que o carro leva para passar o trem e quanto deslocou o trem nessa passagem, para um referencial na Terra.

Comentários:

Novamente, vamos considerar o referencial em um dos dois móveis. Neste caso, consideremos o referencial no trem. Então, para calcular o tempo que o carro leva para passar pelo trem devemos calcular a velocidade do carro em relação ao trem e, também, o deslocamento relativo.

Novamente, se você estivesse no trem, você veria o carro se aproximando com $v_{carro} - v_{trem}$. Tudo se passa como se o trem estivesse parado e a velocidade do carro é decrescida da velocidade do trem.

Pense na seguinte situação, você está viajando na rodovia a 100 km/h e vê um carro na frente viajando a 90 km/h. Se você fixar o seu olhar no carro da frente, sua sensação é que está se aproximando lentamente do automóvel a sua frente ($100 - 90 = 10 km/h$).

Por outro lado, quando você fixa seu olhar nos carros questão vindo em sentido contrário, a sensação é que os carros estão muito mais rápidos. Isto ocorre porque a sua velocidade relativa com relação a esses carros é a soma das velocidades, ou seja, uma velocidade relativa alta.

Portanto, para o carro passar pelo trem ele precisa atravessar todo o trem, isto é, $\Delta s_{relativo} = L$. Logo:

$$\Delta s_{rel} = v_{rel} \cdot \Delta t$$

$$\Rightarrow \Delta t = \frac{L}{v_{carro} - v_{trem}}$$

Para determinarmos o deslocamento do trem em relação a Terra, devemos fazer que:

$$\Delta s_{trem} = v_{trem} \cdot \Delta t$$

$$\therefore \boxed{\Delta s_{trem} = \frac{v_{trem} . L}{v_{carro} - v_{trem}}}$$

19) (Super vespa)

São José e Jacareí são ligadas por uma estrada reta de d comprimento e, em um dado momento, dois trens partem um ao encontro do outro, com velocidades escalares iguais a v_T. No instante da partida, uma vespa parada na parte dianteira de um dos trens parte voando, em linha reta, ao encontro do outro trem, com velocidade de v_v. Ao chegar no outro trem, a vespa volta imediatamente ao primeiro trem, e assim prossegue até que os dois trens se colidem e esmagam a vespa. Determine a distância percorrida pela vespa.

Comentários:

Inicialmente, precisamos determinar quanto tempo os trens levam para se chocarem. Dado que os trens se locomovem com velocidades iguais, não é difícil de ver que ele se encontrar no ponto médio de São José a Jacareí.

Logo, o tempo que os trens levam para se chocarem é:

$$\Delta s_{trem} = v_T . \Delta t$$

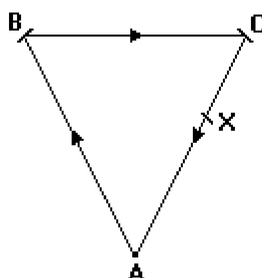
$$\Rightarrow \boxed{\Delta t = \frac{d}{2v_T}}$$

Portanto, a vespa se moveu com uma velocidade v_v durante este tempo, então:

$$\boxed{d_{vespa} = v_v . \frac{d}{2v_T}}$$

20)

Tem-se que uma fonte sonora no vértice A de uma pista triangular equilátera e horizontal, de 340 m de lado. A fonte emite um sinal que após ser refletido sucessivamente em B e C retorna ao ponto A. No mesmo instante em que a fonte é acionada, um corredor parte do ponto X, situado entre C e A, em direção a A, com velocidade constante de 10 m/s. Se o corredor e o sinal refletido atingem A no mesmo instante, a distância AX é de:



a) 10 m

b) 20 m

c) 30 m

d) 340 m

e) 1020 m

Dado: velocidade do som no ar = 340 m/s.

Comentários:

O tempo que o som leva para sair de A e ser refletido por B e por C é o mesmo tempo que o corredor leva para sair de X e chegar a A.

Então, vamos calcular o tempo que o sinal sonoro leva para realizar o seu percurso.

$$\Delta t_{som} = \frac{d_{som}}{v_{som}} = \frac{3 \cdot 340}{340} = 3\ s$$

Portanto, a distância deslocada pelo corredor será: $d_{corredor} = v_{corretor} \cdot \Delta t_{som} = 10 \cdot 3 = 30\ m$.

Gabarito: C



9. Lista de questões nível 1

1. (SIMULADO – EAM)

Um jovem andando de bicicleta se desloca em trajetória retilínea em um percurso de 2 km. Ele percorre a primeira metade com velocidade de 4 km/h, chega a uma barraca de água e permanece parado por 20 minutos e, em seguida, percorre a segunda metade com velocidade de 6 km/h. Sabendo que o intervalo de tempo para as mudanças de velocidades são praticamente desprezíveis, a velocidade média do ciclista, em km/h, que mais se aproxima considerando o percurso total é de:

(A) 5 (B) 4,8 (C) 3,6 (D) 2,66 (E) 0,75

2. (Simulado Colégio Naval)

Dois carros estão separados por uma distância de 168 km, movendo em direções opostos, se encontrar após 7 h. Sabendo que a diferença das velocidades é de 2 km/h, a velocidade do carro mais rápido é de:

a) 11 km/h b) 13 km/h c) 15 km/h

d) 9 km/h e) 7 km/h

3. (Simulado Colégio Naval)

Trabalhando em uma obra, um homem sobe em uma escada que está apoiada contra uma parede. A escada tem uma das extremidades a 8 metros do solo e a base está a 6 metros da parede. Ele sobre até o topo da escada em 4 segundos, mas ao chegar no topo ele escorrega e cai verticalmente, atingindo o solo no próximo segundo. Dessa forma, o módulo da velocidade média do homem desde o momento em que ele começa a subir a escada até chegar ao solo na queda é de:

a) 5,25 m/s b) 3,6 m/s c) 2,4 m/s

d) 1,2 m/s e) 1,6 m/s

4. (Simulado Colégio Naval)

Um jovem atleta está correndo em seu treino matinal, quando ele vê um paredão de pedras a sua frente, o jovem solta a grito de que está chegando próximo do seu alvo, muito perto do paredão. Após alguns segundos, ele percebe que o som emitido sofreu reflexão na parede e retornou enquanto ele deslocou 17 metros. Considerando que a velocidade do som é igual a 340 m/s e que quando ele emitiu o som ele estava a 340 metros da parede, podemos dizer que a velocidade do atleta era de aproximadamente:

a) 16 km/h b) 21 km/h c) 26 km/h

d) 31km/h e) 38 km/h

5. (Simulado Colégio Naval)

Em uma avenida na zona sul de São José dos Campos, existem alguns semáforos que são sincronizados de tal forma que os carros, sem movendo com um certa velocidade, sempre

encontram semáforos aberto, conhecido na cidade como onda verde. Sabe-se que a distância entre dois semáforos sucessivos é de 400 metros e que o intervalo de tempo entre a abertura de um sinal e o seguinte é de 24 segundos. Dessa forma, a velocidade média com que os carros devem trafegar para aproveitar a onda verde é de:

a) 16,7 km/h b) 40 km/h c) 50 km/h

d) 60 km/h e) 70 km/h

6. (Simulado Colégio Naval)

Durante um treinamento de missão de resgate em uma aeronave da força aérea, um soldado dentro da aeronave afirma que é necessário soltar o pacote de emergência de saúde exatamente quando eles estiverem na vertical logo acima do alvo. Sabendo que o avião se desloca a 3 mil metros de altura a uma velocidade constante, podemos afirmar que:

a) o soldado está errado, pois, independente do referencial, a trajetória do pacote emergencial sempre será um arco de parábola.

b) o soldado sempre verá o pacote cair na vertical, considerando que ao soltar o pacote, a velocidade da aeronave não se alterou.

c) o soldado está errado, pois o pacote irá descrever um quarto de circunferência para quem está parado na Terra.

d) para uma pessoa que está parada na Terra, o pacote deve cair na vertical, independentemente de onde ela esteja.

e) para uma pessoa que está se movendo em uma estrada retilínea, com velocidade constante, o pacote sempre vai descrever uma reta.

7. (EsPCEx – 2012)

Um automóvel percorre a metade de uma distância D com uma velocidade média de 24 m/s e a outra metade com uma velocidade média de 8 m/s. Nesta situação, a velocidade média do automóvel, ao percorrer toda a distância D, é de:

a) 12 m/s b) 14 m/s c) 16 m/s

d) 18 m/s e) 32 m/s

8. (EsPCEx – 2012)

Um avião bombardeiro deve interceptar um comboio que transporta armamentos inimigos quando este atingir um ponto A, onde as trajetórias do avião e do comboio se cruzarão. O comboio partirá de um ponto B, às 8 h, com uma velocidade constante igual a 40 km/h, e percorrerá uma distância de 60 km para atingir o ponto A. O avião partirá de um ponto C, com velocidade constante igual a 400 km/h, e percorrerá uma distância de 300 km até atingir o ponto A. Consideramos o avião e o comboio como partículas descrevendo trajetórias retilíneas. Os pontos A, B e C estão representados no desenho abaixo.



Para conseguir interceptar o comboio no ponto A, o avião deverá iniciar o seu voo a partir do ponto C às:

a) 8 h e 15 min. b) 8 h e 30 min. c) 8 h e 45 min.

d) 9 h e 50 min. e) 9 h e 15 min.

9. (EEAR – 2018)

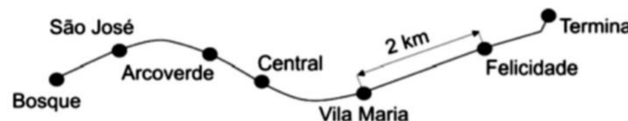
Um móvel completa 1/3 de um percurso com o módulo da sua velocidade média igual a 2 km/h e o restante com o módulo da velocidade média igual a 8 km/h. Sendo toda a trajetória retilínea, podemos afirmar que a velocidade média desse móvel durante todo o percurso, em km/h, foi igual a

a) 4 b) 5 c) 6 d) 10

10.

Um passageiro, viajando de metrô, fez o registro de tempo entre duas estacoes e obteve os valores indicados na tabela.

	Chegada	Partida
Vila Maria	0:00min	1:00min
Felicidade	5:00min	6:00min



Supondo que a velocidade média entre duas estações consecutivas seja sempre a mesma e que o trem pare o mesmo tempo em qualquer estação da linha, de 15 km de extensão, é possível estimar que um trem, desde a partida da Estação Bosque até a chegada à Estação Terminal, leva aproximadamente:

a) 20 min. b) 25 min. c) 30 min.

d) 35 min. e) 40 min.

11.

Um fazendeiro percorre, com seu jeep, os limites de sua fazenda, que tem o formato de um losango, com os lados aproximadamente iguais. Devido às peculiaridades do terreno, cada lado foi percorrido com uma velocidade média diferente: o primeiro a 20KM/h, o segundo a 30 Km/h, o terceiro a 40Km/h e, finalmente, o último a 60Km/h.

A velocidade média desenvolvida pelo fazendeiro para percorrer todo o perímetro da fazenda, em km/h, foi de:

a) 50 b) 42 c) 38 d) 36 e) 32

12.

Um motoqueiro obtém velocidades médias (v) e (kv) na primeira metade e no percurso todo, respectivamente, onde k é uma constante positiva. Se $kv \neq 0$, é correto afirmar que:

01. a velocidade média, na segunda metade do percurso, foi igual a k.

02. a velocidade média, na segunda metade do percurso, foi $[(1+K)v]/2$.

04. é impossível que se tenha $K=2$.

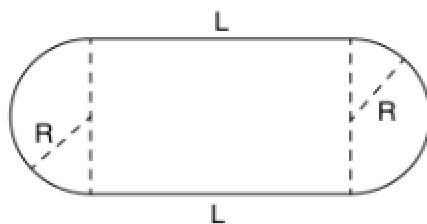
08. o tempo gasto, no percurso todo, foi o dobro daquele gasto na primeira metade.

16. é impossível determinar a razão entre os tempos gastos na primeira e na segunda metade.

Soma:

13.

Um ciclista descreve uma volta completa em uma pista que se compõe de duas retas de comprimento L e duas semicircunferências de raio R conforme representado na figura a seguir.



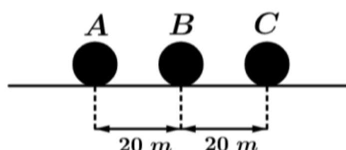
A volta dá-se de forma que a velocidade escalar média nos trechos retos seja v e nos trechos curvos seja 2v/3. O ciclista completa a volta com uma velocidade escalar média em todo o percurso igual a 4v/5. A partir dessas informações, é correto afirmar que o raio dos semicírculos é dado pela expressão:

a) $L = \pi R$ b) $L = \frac{\pi R}{2}$ c) $L = \frac{\pi R}{3}$ d) $L = \frac{\pi R}{4}$ e) $L = \frac{3\pi R}{2}$

14. (Simulado EAM)

Três esferas são lançadas simultaneamente em superfícies horizontais, perfeitamente lisas, permanecendo com velocidade constante e iguais a 30 m/s, 9 m/s e 15 m/s, respectivamente. As esferas são lançadas todas no mesmo sentido. Após quanto tempo a esfera A estará a mesma distância de B e de C?

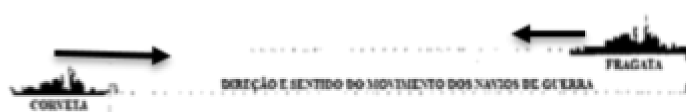
A figura está fora de escala. As dimensões das esferas são desprezíveis quando comparadas com as distâncias iniciais entre as esferas.



(A) 3,33 s (B) 1,67 s (C) 1,50 s (D) 2,40 s (E) 4,50 s

15. (Simulado CN)

Considere dois navios de guerra, uma Fragata e uma Corveta navegando paralelamente em sentidos opostos em um trecho retilíneo.



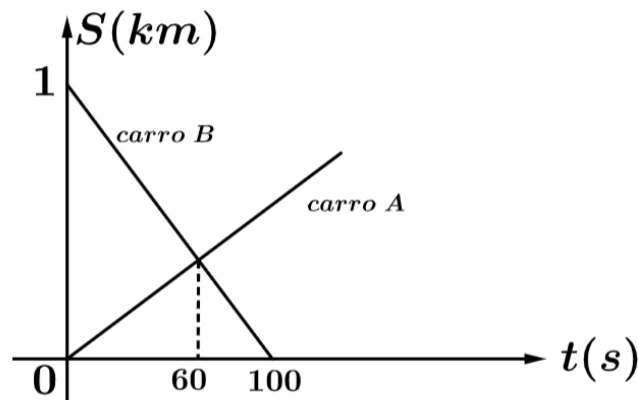
Sabe-se que a Corveta tem 80 metros e se move em um MRU com velocidade de 20 m/s e a Fragata possui 130 metros de comprimento e se move em um MRU com velocidade de 10 m/s. considerando que as águas estão paradas, então o intervalo de tempo que dura o cruzamento dos navios, em segundos, é de:

(A) 21 (B) 15 (C) 5 (D) 7 (E) 9

16. (Simulado CN)

Dois automóveis viajam em uma estrada retilínea na mesma direção. O gráfico do movimento dos carros é mostrado logo abaixo.





Assinale a alternativa correta.

a) em $t = 60\ s$, os carros possuem a mesma velocidade.

b) em $t = 100\ s$, o carro B parou.

c) a aceleração de B é maior que a aceleração de A, em módulo.

d) a velocidade de A é de 24 km/h.

e) a velocidade de B é de 50 km/h.

17. (Simulado CN)

Viajando em uma estrada retilínea, um carro A com velocidade de 54 km/h, quando visualiza outro carro a 250 m, se movendo no mesmo sentido. Sabe-se que a velocidade do carro B da frente é de 36 km/h.

Pode-se afirmar que o carro A alcançará o carro B após:

(A) 15 s (B) 25 s (C) 50 s (D) 75 s (E) 90 s

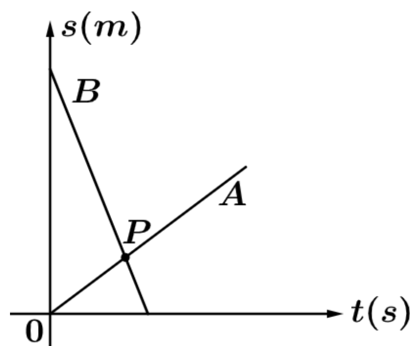
18. (Simulado CN)

Brincando com dois carrinhos de controle remoto, um jovem inicia o movimento do carrinho A com velocidade constante e igual a 6 m/s em linha reta. Após 2 segundos, inicia o movimento do carrinho B, com velocidade constante e igual a 10 m/s. O carro B alcançará o carro A após:

(A) 1 s (B) 3 s (C) 4 s (D) 5 s (E) 8 s

19. (Simulado CN)

Em um laboratório de Física, um professor estuda o movimento de duas esferas A e B. Ele constrói o gráfico do espaço pelo tempo para as duas esferas e verifica as seguintes curvas de movimentos.



De acordo com o gráfico, pode-se afirmar que:

(A) no ponto P, a velocidade de A é igual a velocidade de B

(B) a esfera A se move em um MRU e a esfera B se move em um MRUV.



(C) a esfera B é mais lenta que a esfera A.

(D) a esfera A tem aceleração positiva.

(E) a esfera B é mais rápida que A e tem sentido oposto a esta.

20. (Simulado CN)

Um motociclista se move com uma velocidade de 90 km/h em linha reta em direção a uma parede vertical. Se o motorista aciona a buzina e após 2 segundos escuta ela novamente, então a distância do motociclista até o paredão no instante em que ele aciona a buzina é de:

Dado: velocidade do som igual a 340 m/s.

(A) 265 m (B) 315 m (C) 360 m (D) 365 m (E) 630 m



10. Gabarito da lista de questões nível 1 sem comentários

1) D
2) B
3) D
4) D
5) D
6) B
7) A
8) C
9) A
10) D
11) E
12) 04
13) A
14) B
15) D
16) D
17) C
18) D
19) E
20) D





11. Lista de questões nível 1 comentada

1. (SIMULADO – EAM)

Um jovem andando de bicicleta se desloca em trajetória retilínea em um percurso de 2 km. Ele percorre a primeira metade com velocidade de 4 km/h, chega a uma barraca de água e permanece parado por 20 minutos e, em seguida, percorre a segunda metade com velocidade de 6 km/h. Sabendo que o intervalo de tempo para as mudanças de velocidades são praticamente desprezíveis, a velocidade média do ciclista, em km/h, que mais se aproxima considerando o percurso total é de:

(A) 5 (B) 4,8 (C) 3,6 (D) 2,66 (E) 0,75

Comentários:

Velocidade é média é dada por:

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{2}{\Delta t_1 + \Delta t_{parado} + \Delta t_2}$$

Em que o tempo no primeiro trecho é dado por:

$$\Delta t_1 = \frac{\Delta s_1}{v_1} = \frac{1}{4}\ h$$

O intervalo tempo que ele fica parado em horas é de:

$$\Delta t_{parado} = \frac{20}{60} = \frac{1}{3} h$$

O intervalo de tempo que ele desloca a segunda metade:

$$\Delta t_2 = \frac{\Delta s_2}{v_2} = \frac{1}{6}\ h$$

Portanto:

$$v_m = \frac{2}{\frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}} \Rightarrow v_m = \frac{2}{\frac{3+4+2}{12}} = \frac{2 \cdot 12}{9} = \frac{8}{3}\ km/h$$

$$\boxed{v_m \cong 2{,}66\ km/h}$$

Gabarito: D

2. (Simulado Colégio Naval)

Dois carros estão separados por uma distância de $168\ km$, movendo em direções opostos, se encontrar após $7\ h$. Sabendo que a diferença das velocidades é de $2\ km/h$, a velocidade do carro mais rápido é de:

a) $11\ km/h$ b) $13\ km/h$ c) $15\ km/h$

d) $9\ km/h$ e) $7\ km/h$

Comentários:

Utilizando o conceito de velocidade relativa, temos:

$$v_{relativa} = \frac{\Delta s_{relativo}}{\Delta t}$$

$$v_{relativa} = \frac{168}{7} = 24\ km/h$$

Como os carros estão em sentidos contrários, então o módulo da velocidade relativa entre eles é dada pela soma dos módulos das velocidades.

$$v_1 + v_2 = 24$$

Se $v_1 > v_2$, então:

$$v_1 - v_2 = 2$$

Portanto:

$$2v_1 = 24 + 2 \therefore \boxed{v_1 = 13\ km/h}$$

Gabarito: B

3. (Simulado Colégio Naval)

Trabalhando em uma obra, um homem sobe em uma escada que está apoiada contra uma parede. A escada tem uma das extremidades a 8 metros do solo e a base está a 6 metros da parede. Ele sobre até o topo da escada em 4 segundos, mas ao chegar no topo ele escorrega e cai verticalmente, atingindo o solo no próximo segundo. Dessa forma, o módulo da velocidade média do homem desde o momento em que ele começa a subir a escada até chegar ao solo na queda é de:

a) 5,25 m/s b) 3,6 m/s c) 2,4 m/s

d) 1,2 m/s e) 1,6 m/s

Comentários:

Se ele gasta 4 segundos para chegar no topo e no próximo segundo ele está no chão, então o intervalo de tempo desde início do movimento até a queda é de 5 segundos.

Como velocidade média é variação do espaço pelo tempo, a diferença entre as posições final e inicial do homem é justamente a distância do pé da escada a parede, que é de 6 metros. Portanto, o módulo da velocidade média é de:

$$v_m = \frac{|\Delta S|}{\Delta t} = \frac{6}{5} = 1{,}2\ m/s$$

Gabarito: D

4. (Simulado Colégio Naval)

Um jovem atleta está correndo em seu treino matinal, quando ele vê um paredão de pedras a sua frente, o jovem solta a grito de que está chegando próximo do seu alvo, muito perto do paredão. Após alguns segundos, ele percebe que o som emitido sofreu reflexão na parede e retornou enquanto ele deslocou 17 metros. Considerando que a velocidade do som é igual a 340 m/s e que quando ele emitiu o som ele estava a 340 metros da parede, podemos dizer que a velocidade do atleta era de aproximadamente:

a) 16 km/h b) 21 km/h c) 26 km/h

d) 31km/h e) 38 km/h

Comentários:

Enquanto o som viaja até o paredão e volta para o atleta, o jovem se desloca em direção ao paredão. Assim:

$$\Delta t_{atleta} = \frac{x}{v}$$

$$\Delta t_{som} = \frac{D}{v_S} + \frac{D - x}{v_S}$$

Logo:

$$\Delta t_{atleta} = \Delta t_{som}$$

$$\frac{x}{v} = \frac{D}{v_S} + \frac{D - x}{v_S}$$

Substituindo valores, temos:

$$\frac{17}{v} = \frac{340}{340} + \frac{340}{340} - \frac{17}{340}$$

$$\frac{17}{v} = 2 - 0{,}05$$

$$v \cong 8{,}7\frac{m}{s} \cong 31 km/h$$

Gabarito: D

5. (Simulado Colégio Naval)

Em uma avenida na zona sul de São José dos Campos, existem alguns semáforos que são sincronizados de tal forma que os carros, sem movendo com um certa velocidade, sempre encontram semáforos aberto, conhecido na cidade como onda verde. Sabe-se que a distância entre dois semáforos sucessivos é de 400 metros e que o intervalo de tempo entre a abertura de um sinal



e o seguinte é de 24 segundos. Dessa forma, a velocidade média com que os carros devem trafegar para aproveitar a onda verde é de:

a) 16,7 km/h
b) 40 km/h
c) 50 km/h
d) 60 km/h
e) 70 km/h

Comentários:

Se a distância entre os semáforos é de 400m e o intervalo de tempo para o carro passar pelos dois semáforos é de 24 segundos, então:

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

$$v_m = \frac{400}{24} = \frac{100}{6} = \frac{50}{3}\ m/s$$

$$v_m = \frac{50}{3} \cdot 3{,}6 = 60\ km/h$$

Gabarito: D

---

6. (Simulado Colégio Naval)

Durante um treinamento de missão de resgate em uma aeronave da força aérea, um soldado dentro da aeronave afirma que é necessário soltar o pacote de emergência de saúde exatamente quando eles estiverem na vertical logo acima do alvo. Sabendo que o avião se desloca a 3 mil metros de altura a uma velocidade constante, podemos afirmar que:

a) o soldado está errado, pois, independente do referencial, a trajetória do pacote emergencial sempre será um arco de parábola.

b) o soldado sempre verá o pacote cair na vertical, considerando que ao soltar o pacote, a velocidade da aeronave não se alterou.

c) o soldado está errado, pois o pacote irá descrever um quarto de circunferência para quem está parado na Terra.

d) para uma pessoa que está parada na Terra, o pacote deve cair na vertical, independentemente de onde ela esteja.

e) para uma pessoa que está se movendo em uma estrada retilínea, com velocidade constante, o pacote sempre vai descrever uma reta.

Comentários:

a) INCORRETA. Sempre que vamos analisar uma trajetória, devemos olhar para o referencial adotado.

b) CORRETA. Para alguém que está na aeronave (se movendo com a velocidade constante da aeronave, inclusive o pacote), ele sempre verá o pacote na vertical, pois o pacote tem a mesma velocidade horizontal da aeronave.

c) INCORRETA. Para um referencial na Terra, referencial inercial, a trajetória será um arco de parábola.

d) INCORRETA. Veja justificativa da alternativa c.

e) INCORRETA. Se a pessoa está em uma estrada retilínea com velocidade constante, então ela descreve um MRU, ou seja, ela é um referencial inercial, assim como a Terra. Portanto, para ela a trajetória do pacote será um arco de parábola.

Gabarito: B

---

7. (EsPCEx – 2012)

Um automóvel percorre a metade de uma distância D com uma velocidade média de 24 m/s e a outra metade com uma velocidade média de 8 m/s. Nesta situação, a velocidade média do automóvel, ao percorrer toda a distância D, é de:

a) 12 m/s b) 14 m/s c) 16 m/s

d) 18 m/s e) 32 m/s

Comentários:

Como apresentado em teoria, neste caso, a velocidade média do automóvel é dada pela média harmônica das velocidades:

$$v_m = \frac{2}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}}$$

$$v_m = \frac{2}{\frac{1}{24} + \frac{1}{8}} = \frac{2}{\frac{1}{24} + \frac{3}{3 \cdot 8}}$$

$$v_m = \frac{2 \cdot 24}{1 + 3} \therefore \boxed{v_m = 12\ m/s}$$

Gabarito: A

---

8. (EsPCEx – 2012)

Um avião bombardeiro deve interceptar um comboio que transporta armamentos inimigos quando este atingir um ponto A, onde as trajetórias do avião e do comboio se cruzarão. O comboio partirá de um ponto B, às 8 h, com uma velocidade constante igual a 40 km/h, e percorrerá uma distância de 60 km para atingir o ponto A. O avião partirá de um ponto C, com velocidade constante igual a 400 km/h, e percorrerá uma distância de 300 km até atingir o ponto A. Consideramos o avião e o comboio como partículas descrevendo trajetórias retilíneas. Os pontos A, B e C estão representados no desenho abaixo.



Para conseguir interceptar o comboio no ponto A, o avião deverá iniciar o seu voo a partir do ponto C às:

a) 8 h e 15 min. b) 8 h e 30 min. c) 8 h e 45 min.

d) 9 h e 50 min. e) 9 h e 15 min.

Comentários:



Partindo do ponto B, às 8h, com velocidade constante de 40 km/h, o comboio chegará em A às:

$$t_{comboio} = \frac{\Delta S_{BA}}{v} = \frac{60}{40} = 1{,}5\ h$$

Logo, o comboio chegará em A às $8 + 1{,}5 = 9{,}5h = 9h30min$. O tempo de voo do avião é igual a:

$$\Delta_{t_{voo}} = \frac{\Delta S_{avião}}{v_{avião}} = \frac{300}{400} = 0{,}75\ h$$

$$\Delta t_{voo} = 45\ min$$

Ou seja, para conseguir interceptar o comboio no ponto A, o avião deverá sair 45 minutos antes das 9h30min, isto é:

$$9h30min - 45min = 8h45min$$

Gabarito: C

---

9. (EEAR – 2018)

Um móvel completa 1/3 de um percurso com o módulo da sua velocidade média igual a 2 km/h e o restante com o módulo da velocidade média igual a 8 km/h. Sendo toda a trajetória retilínea, podemos afirmar que a velocidade média desse móvel durante todo o percurso, em km/h, foi igual a

a) 4 b) 5 c) 6 d) 10

Comentários:

A velocidade média ao longo de todo o percurso é dada por:

$$v_m = \frac{\Delta S_{total}}{\Delta t_{total}} = \frac{\Delta S_{total}}{\Delta t_1 + \Delta t_2}$$

Os tempos em cada trechos são dados por:

$$\Delta t_1 = \frac{\frac{\Delta S_{total}}{3}}{v_1} = \frac{\frac{\Delta S_{total}}{3}}{2} = \frac{\Delta S_{total}}{6}$$

$$\Delta t_2 = \frac{\frac{2\Delta S_{total}}{3}}{v_2} = \frac{\frac{2\Delta S_{total}}{3}}{8} = \frac{\Delta S_{total}}{12}$$

Portanto:

$$v_m = \frac{\Delta S_{total}}{\frac{\Delta S_{total}}{6} + \frac{\Delta S_{total}}{12}} = \frac{\Delta S_{total}}{\Delta S_{total}\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{12}\right)}$$

$$v_m = \frac{1}{\frac{1}{6} + \frac{1}{12}} = \frac{1}{\frac{1\cdot 2}{6\cdot 2} + \frac{1}{12}} = \frac{1}{\frac{2+1}{12}} = \frac{12}{3} = 4\ km/h$$



$$\boxed{v_m = 4\ km/h}$$

Gabarito: A

10.

Um passageiro, viajando de metrô, fez o registro de tempo entre duas estacoes e obteve os valores indicados na tabela.

	Chegada	Partida
Vila Maria	0:00min	1:00min
Felicidade	5:00min	6:00min



Supondo que a velocidade média entre duas estações consecutivas seja sempre a mesma e que o trem pare o mesmo tempo em qualquer estação da linha, de 15 km de extensão, é possível estimar que um trem, desde a partida da Estação Bosque até a chegada à Estação Terminal, leva aproximadamente:

a) 20 min. b) 25 min. c) 30 min.

d) 35 min. e) 40 min.

Comentários:

Vamos calcular a velocidade média do trem, dado que, ele anda 2 km (de Vila Maria a Felicidade) em 4 min, de acordo com a tabela.

$$v_{trem} = \frac{2}{\frac{4}{60}} = 30\ km/h$$

Com isso, podemos calcular o tempo gasto para o trem sair da Bosque até a Terminal:

$$\Delta t = \frac{15}{30} = 0{,}5\ h = 30\ min$$

Entretanto, devemos lembrar que o trem fica 1 min parado nas estações até chegar na Terminal, isto é, ele gasta um minuto nas estações de São José até a Felicidade, ou seja, mais 5 minutos.

Então, o tempo total será de 35 minutos.

Gabarito: D

11.

Um fazendeiro percorre, com seu jeep, os limites de sua fazenda, que tem o formato de um losango, com os lados aproximadamente iguais. Devido às peculiaridades do terreno, cada lado foi percorrido com uma velocidade média diferente: o primeiro a 20KM/h, o segundo a 30 Km/h, o terceiro a 40Km/h e, finalmente, o último a 60Km/h.

A velocidade média desenvolvida pelo fazendeiro para percorrer todo o perímetro da fazenda, em km/h, foi de:

a) 50 b) 42 c) 38 d) 36 e) 32

Comentários:

Como visto em teoria, se um móvel percorre distâncias iguais, com velocidades diferentes, a velocidade média é dada pela média harmônica das velocidades, logo, temos que:

$$v_m = \frac{4}{\frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{40} + \frac{1}{60}} = 32\ km/h$$

Gabarito: E

12.

Um motoqueiro obtém velocidades médias (v) e (kv) na primeira metade e no percurso todo, respectivamente, onde k é uma constante positiva. Se $kv \neq 0$, é correto afirmar que:

01. a velocidade média, na segunda metade do percurso, foi igual a k.

02. a velocidade média, na segunda metade do percurso, foi $[(1 + K)v]/2$.

04. é impossível que se tenha $K = 2$.

08. o tempo gasto, no percurso todo, foi o dobro daquele gasto na primeira metade.

16. é impossível determinar a razão entre os tempos gastos na primeira e na segunda metade.

Soma:

Comentários:

Novamente, sabemos que a velocidade média do percurso todo é:

$$v_m = \frac{2}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}} \Rightarrow kv = \frac{2}{\frac{1}{v} + \frac{1}{v_2}} \Rightarrow \frac{1}{v_2} = \frac{2}{kv} - \frac{1}{v} \Rightarrow v_2 = \frac{k}{2 - k}.v$$

Assim, podemos ver de imediato que as duas primeiras afirmações são falsas, e a informação (04) é verdadeira, pois, para $k = 2$ não podemos definir v_2, ela seria tão grande quanto queiramos, quando k tende a 2.

Tempo para a primeira metade: $\Delta t_1 = \frac{d}{v}$ (considere que o caminho todo tenha uma distância 2d para não ficar trabalhando com frações).

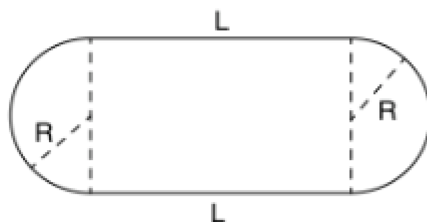
Tempo para a segunda metade: $\Delta t_2 = \frac{d}{\frac{kv}{2-k}}$.

Portanto, a relação dos tempos é dada por: $\frac{\Delta t_2}{\Delta t_1} = \frac{2-k}{k}$. Logo, as duas últimas afirmações estão erradas também. Dessa forma, a única afirmativa correta é a 04. Portanto, soma igual a 04.

Gabarito: 04

13.

Um ciclista descreve uma volta completa em uma pista que se compõe de duas retas de comprimento L e duas semicircunferências de raio R conforme representado na figura a seguir.



A volta dá-se de forma que a velocidade escalar média nos trechos retos seja v e nos trechos curvos seja 2v/3. O ciclista completa a volta com uma velocidade escalar média em todo o percurso igual a 4v/5. A partir dessas informações, é correto afirmar que o raio dos semicírculos é dado pela expressão:

a) $L = \pi R$ b) $L = \frac{\pi R}{2}$ c) $L = \frac{\pi R}{3}$ d) $L = \frac{\pi R}{4}$ e) $L = \frac{3\pi R}{2}$

Comentários:

A velocidade média de uma volta é dada por:

$$v_m = \frac{2L + 2\pi R}{\frac{L}{v} + \frac{L}{v} + \frac{\pi R}{\frac{2}{3}v} + \frac{\pi R}{\frac{2}{3}v}} \Rightarrow \frac{4v}{5} = \frac{2(L + \pi R)}{\frac{2L}{v} + \frac{3\pi R}{v}}$$

$$\Rightarrow \frac{8}{5}L + \frac{12\pi}{5}R = 2L + 2\pi R$$

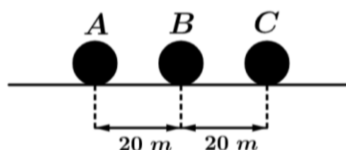
$$\Rightarrow \frac{2}{5}L = \frac{2\pi}{5}R \therefore L = \pi R$$

Gabarito: A

14. (Simulado EAM)

Três esferas são lançadas simultaneamente em superfícies horizontais, perfeitamente lisas, permanecendo com velocidade constante e iguais a 30 m/s, 9 m/s e 15 m/s, respectivamente. As esferas são lançadas todas no mesmo sentido. Após quanto tempo a esfera A estará a mesma distância de B e de C?

A figura está fora de escala. As dimensões das esferas são desprezíveis quando comparadas com as distâncias iniciais entre as esferas.



(A) 3,33 s (B) 1,67 s (C) 1,50 s (D) 2,40 s (E) 4,50 s

Comentários:

Adotando que o movimento é para a direita e colocando o marco zero na posição de A, então temos a equação horária do espaço de cada esfera:



$$s_A = 0 + 30t = 30t$$

$$s_B = 20 + 9t$$

$$s_C = 40 + 15t$$

Quando A estiver a mesma distância entre B e C é dizer que A está no ponto médio de B e C, ou ainda, dizer que $s_A - s_B = s_C - s_A$. Portanto:

$$s_A - s_B = s_C - s_A$$

$$30t - (20 + 9t) = 40 + 15t - (30t)$$

$$30t - 20 - 9t = 40 + 15t - 30t$$

$$30t - 9t + 15t = 60$$

$$36t = 60$$

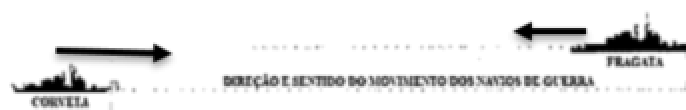
$$t = \frac{60}{36} = \frac{10}{6} = 1{,}67\ s$$

Gabarito: B

---

15. (Simulado CN)

Considere dois navios de guerra, uma Fragata e uma Corveta navegando paralelamente em sentidos opostos em um trecho retilíneo.

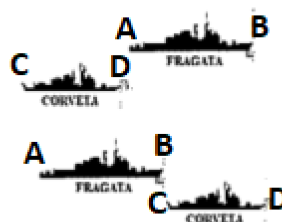


Sabe-se que a Corveta tem 80 metros e se move em um MRU com velocidade de 20 m/s e a Fragata possui 130 metros de comprimento e se move em um MRU com velocidade de 10 m/s. considerando que as águas estão paradas, então o intervalo de tempo que dura o cruzamento dos navios, em segundos, é de:

(A) 21 (B) 15 (C) 5 (D) 7 (E) 9

Comentários:

O início do cruzamento começa quando as dianteiras estiverem alinhas e finaliza quando as traseiras estiverem alinhadas.



Tomando a traseira da Corveta para referência no cruzamento, note que ao finalizar a cruzamento, ela estará alinhada com a posição da traseira da Fragata, ou seja, o espaço de C é igual ao espaço de B quando finaliza o cruzamento. Considerando como origem de eixo de movimento o ponto C, temos:

$$S_C = S_B$$

$$0 + 20 \cdot t = (80 + 130) - 10 \cdot t$$

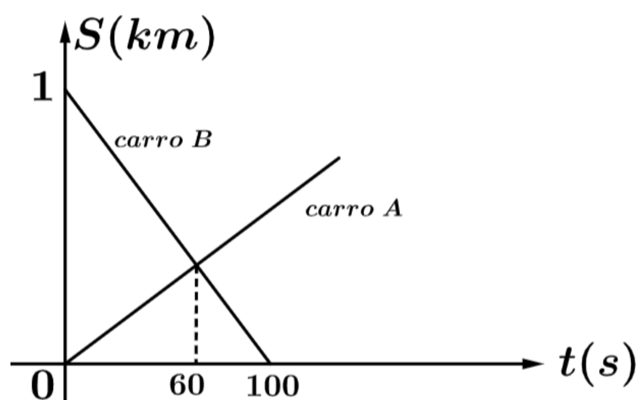
$$30t = 210$$

$$\boxed{t = 7\ s}$$

Gabarito: D

16. (Simulado CN)

Dois automóveis viajam em uma estrada retilínea na mesma direção. O gráfico do movimento dos carros é mostrado logo abaixo.



Assinale a alternativa correta.

a) em $t = 60\ s$, os carros possuem a mesma velocidade.

b) em $t = 100\ s$, o carro B parou.

c) a aceleração de B é maior que a aceleração de A, em módulo.

d) a velocidade de A é de 24 km/h.

e) a velocidade de B é de 50 km/h.

Comentários:

a) INCORRETA. Pelo gráfico do espaço pelo tempo, em $t = 60\ s$, o espaço dos corpos é o mesmo e não a velocidade.

b) INCORRETA. Em $t = 100\ s$ o carro B apenas está no espaço igual a zero. Como os gráficos de A e de B são retas e são gráficos retas, então as velocidades de A e de B são constante e diferentes de zero. Então, então $t = 100\ s$, a velocidade de B é diferente de zero.

c) INCORRETA. Os carros possuem velocidades constante, ou seja, as acelerações são nulas.

d) CORRETA. Pelo gráfico, o ponto de encontro tem coordenada em s que pode ser extraída por semelhança de triângulos:

$$\frac{1000}{s} = \frac{100}{40}$$

$$s = 400\ m$$

Para o carro A, temos:

$$v_A = \frac{\Delta s_A}{\Delta t} = \frac{400 - 0}{60 - 0} = \frac{20}{3}\ m/s$$

$$v_A = \frac{20}{3} \cdot 3{,}6 = 24\ km/h$$

e) INCORRETA. Pelo gráfico do espaço pelo tempo, temos:

$$v_B = \frac{\Delta s_B}{\Delta t}$$

$$v_B = \frac{0 - 1000}{100 - 0} = -\frac{1000}{100} = -10\ m/s$$

$$v_B = -36\ km/h$$

Gabarito: D

---

17. (Simulado CN)

Viajando em uma estrada retilínea, um carro A com velocidade de 54 km/h, quando visualiza outro carro a 250 m, se movendo no mesmo sentido. Sabe-se que a velocidade do carro B da frente é de 36 km/h.

Pode-se afirmar que o carro A alcançará o carro B após:

(A) 15 s (B) 25 s (C) 50 s (D) 75 s (E) 90 s

Comentários:

Inicialmente, devemos transformar a velocidade dos carros de km/h para m/s. Então:

$$v_A = \frac{54}{3{,}6} = 15\ m/s$$

$$v_B = \frac{36}{3{,}6} = 10\ m/s$$

Para definir o momento do encontro, podemos colocar como origem de movimento, quando o carro A visualiza o carro B a 250 m de distância e denotar o sentido de movimento dos carros como sentido do eixo de referência. Então, as funções horárias dos espaços de A e de B fica:

$$s_A = 0 + 15 \cdot t$$

$$s_B = 250 + 10 \cdot t$$

Quando A alcança B, então $s_A = s_B$. Portanto:

$$s_A = s_B$$

$$15 \cdot t = 250 + 10 \cdot t$$

$$5 \cdot t = 250$$



$$\boxed{t = 50\ s}$$

Gabarito: C

18. (Simulado CN)

Brincando com dois carrinhos de controle remoto, um jovem inicia o movimento do carrinho A com velocidade constante e igual a 6 m/s em linha reta. Após 2 segundos, inicia o movimento do carrinho B, com velocidade constante e igual a 10 m/s. O carro B alcançará o carro A após:

(A) 1 s (B) 3 s (C) 4 s (D) 5 s (E) 8 s

Comentários:

Colocando a origem dos tempos no início do movimento de A, temos:

$$s_A = s_{0A} + v_A \cdot t$$

Como o móvel B parte do mesmo ponto de A, mas 2 segundos depois, então:

$$s_B = s_{0B} + v_B \cdot (t - 2)$$

$$s_B = s_{0A} + v_B \cdot (t - 2)$$

Quando eles se encontram, temos:

$$s_A = s_B$$

$$s_{0A} + v_A \cdot t = s_{0A} + v_B \cdot (t - 2)$$

$$v_A \cdot t = v_B \cdot (t - 2)$$

Substituindo valores, temos:

$$6 \cdot t = 10 \cdot (t - 2)$$

$$6t = 10t - 20$$

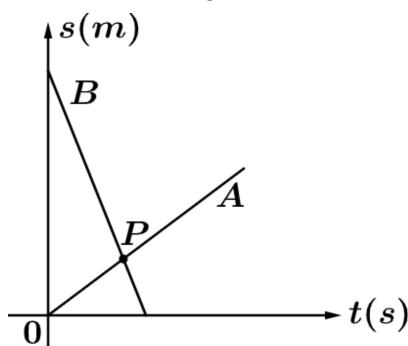
$$4t = 20$$

$$\boxed{t = 5\ s}$$

Gabarito: D

19. (Simulado CN)

Em um laboratório de Física, um professor estuda o movimento de duas esferas A e B. Ele constrói o gráfico do espaço pelo tempo para as duas esferas e verifica as seguintes curvas de movimentos.



De acordo com o gráfico, pode-se afirmar que:

(A) no ponto P, a velocidade de A é igual a velocidade de B

(B) a esfera A se move em um MRU e a esfera B se move em um MRUV.

(C) a esfera B é mais lenta que a esfera A.

(D) a esfera A tem aceleração positiva.

(E) a esfera B é mais rápida que A e tem sentido oposto a esta.

Comentários:

(A) INCORRETA. No ponto P, o espaço de A é igual ao espaço de B, apenas.

(B) INCORRETA. O gráfico apresenta duas retas, então as esferas se movem em MRU.

(C) INCORRETA. A esfera B é mais rápida que a esfera A, elas apenas se move no sentido contrário ao de A. Note que a inclinação da reta de B tem módulo mais que a inclinação da reta de A, ou seja, a intensidade da velocidade de B é maior que a intensidade da velocidade de A.

(D) INCORRETA. A esfera A se move em um MRU.

(E) CORRETA. Conforme mencionado no item (C).

Gabarito: E

---

20. (Simulado CN)

Um motociclista se move com uma velocidade de 90 km/h em linha reta em direção a uma parede vertical. Se o motorista aciona a buzina e após 2 segundos escuta ela novamente, então a distância do motociclista até o paredão no instante em que ele aciona a buzina é de:

Dado: velocidade do som igual a 340 m/s.

(A) 265 m (B) 315 m (C) 360 m (D) 365 m (E) 630 m

Comentários:

Vamos dizer que a distância entre o motociclista e o paredão, no ato de acionar a buzina, é d. Durante o deslocamento do som, o motociclista percorre uma distância igual a:

$$x = v_{moto} \cdot 2 = \frac{90}{3,6} \cdot 2 = 50\ m$$

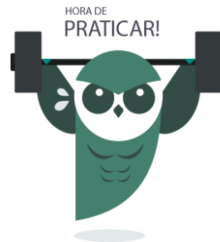
Por outro lado, a distância percorrida pela onda sonora é dada por:

$$d + (d - x) = v_{Som} \cdot 2$$

$$2d - 50 = 340 \cdot 2$$

$$\boxed{d = 365\ m}$$

Gabarito: D



12. Lista de questões nível 2

1. (EN – 2017)

Um motorista faz uma viagem da cidade A até a cidade B. O primeiro um terço do percurso da viagem ele executa com uma velocidade média de 50 km/h. Em um segundo trecho, equivalente à metade do percurso, ele executa com uma velocidade média de 75 km/h e o restante do percurso faz com velocidade média de 25 km/h. Se a velocidade média do percurso todo foi de 60 km/h, é correto afirmar que, se a distância entre as cidades A e B é de

a) 600 km ele ficou parado, pelo menos, 2,0 h durante a viagem.

b) 600 km ele ficou parado, exatamente, 2,0 h durante a viagem.

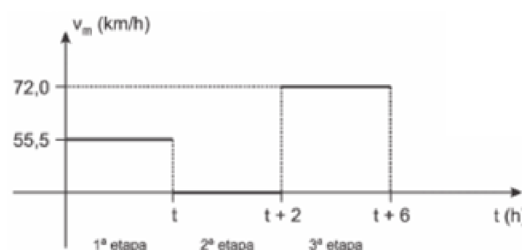
c) 500 km ele ficou parado, exatamente, 1,5 h durante a viagem.

d) 500 km ele ficou parado, pelo menos, 1,0 h durante a viagem.

e) 500 km ele ficou parado, exatamente, 1,0 h durante a viagem.

2. (EN – 2015)

Analise o gráfico abaixo:

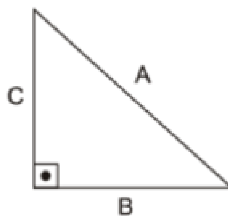


O trajeto entre duas cidades é de 510 km. Considere um veículo executando esse trajeto. No gráfico acima, temos a velocidade média do veículo em três etapas. Com base nos dados apresentados no gráfico, qual a velocidade média, em km/h, estabelecida pelo veículo no trajeto todo?

a) 48 b) 51 c) 54 d) 57 e) 60

3. (AFA – 2011)

Um turista, passeando de bugre pelas areias de uma praia em Natal – RN, percorre uma trajetória triangular, que pode ser dividida em três trechos, conforme a figura abaixo:



Os trechos B e C possuem o mesmo comprimento, mas as velocidades médias desenvolvidas nos trechos A, B e C foram, respectivamente, v, $2v$ e v. A velocidade escalar média desenvolvida pelo turista para percorrer toda a trajetória triangular vale

a) $v\sqrt{2}$ b) $2v\sqrt{2}$ c) $4v$ d) $(4-2\sqrt{2})v$

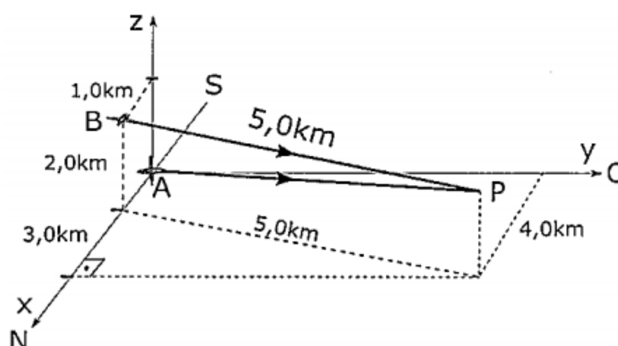
4. (AFA – 2011)

Dois automóveis A e B encontram-se estacionados paralelamente ao marco zero de uma estrada. Em um dado instante, o automóvel A parte, movimentando-se com velocidade escalar constante $V_A = 80\ km/h$. Depois de certo intervalo de tempo, Δt, o automóvel B parte no encalço de A com velocidade escalar constante $V_B = 100\ km/h$. Após 2h de viagem, o motorista de A verifica que B se encontra $10\ km$ atrás e conclui que o intervalo Δt, em que o motorista B ainda permaneceu estacionado, em horas, é igual a:

a) 0,25 b) 0,50 c) 1,00 d) 4,00

5. (EN – 2019)

Analise o gráfico abaixo.



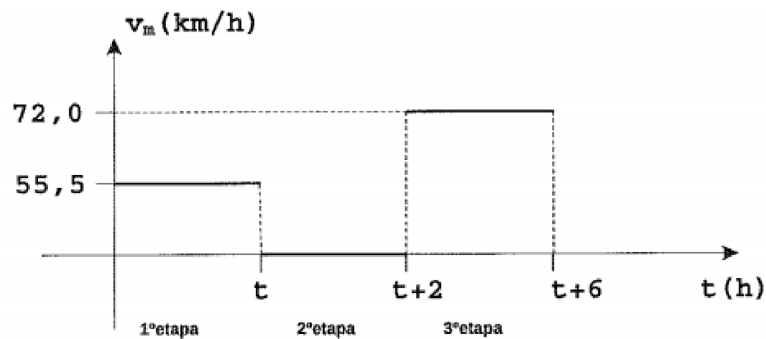
Uma aeronave de patrulha A segue, com velocidade escalar constante V_A, rumo ao ponto P com a finalidade de interceptar outra aeronave, B, a qual mantém altitude e velocidade escalar constante e, inicialmente, encontra-se $1{,}00\ km$ ao norte (sentido positivo de x) e $2{,}00\ km$ acima de A. Sabendo que a aeronave B percorre $5{,}00\ km$ em $30{,}0$ segundos antes de ser interceptada no ponto P, a diferença, $V_A - V_B$, entre as velocidades escalares das duas aeronaves, em km/h, é igual a:

a) 450 b) 300 c) 150 d) 120 e) 90,0

6. (EN – 2015)

Analise o gráfico abaixo.





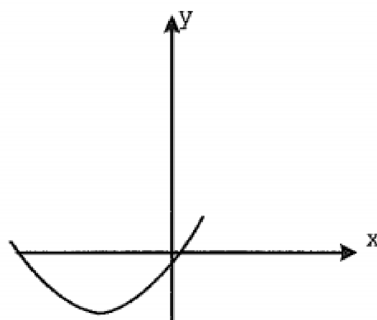
O trajeto entre duas cidades é de 510 km. Considere um veículo executando esse trajeto. No gráfico acima, temos a velocidade média do veículo em três etapas. Com base nos dados apresentados no gráfico, qual a velocidade média, em km/h, estabelecida pelo veículo no trajeto todo?

a) 48 b) 51 c) 54 d) 57 e) 60

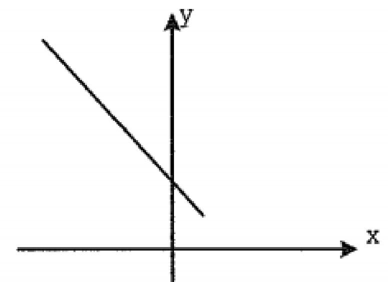
7. (EN – 2014)

Considere uma partícula se movimentando no plano xy. As coordenadas x e y da posição da partícula em função do tempo são dadas por $x(t) = -2t^2 + 2t + 1$ e $y(t) = t^2 - t + 2$, com x e y em metros e t em segundos. Das opções abaixo, assinale a que pode representar o gráfico da trajetória da partícula de $t = 0$ a $t = 4\ s$.

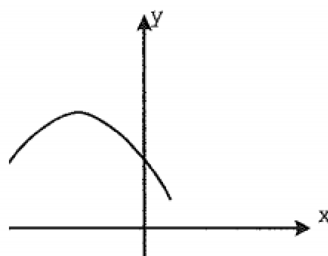
a)



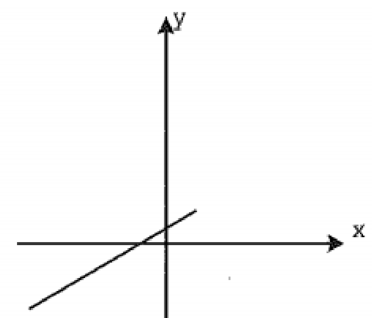
b)



c)

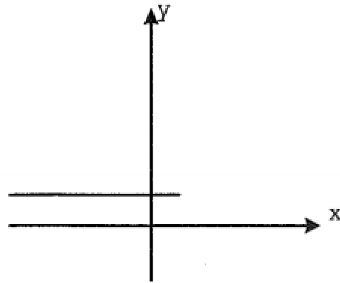


d)



e)





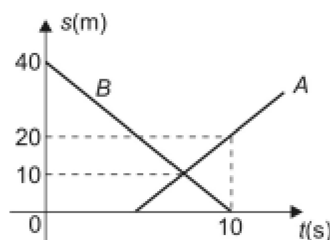
8. (Simulado EFOMM)

Um roedor se encontra a 20 m debaixo de um falcão e, ao perceber que será atacado, foge retilineamente para um buraco, que se encontra a 15 m, com uma velocidade constante de 3 m/s. Qual deve ser a velocidade média do falcão, se este alcança o roedor no exato momento em que ele entra no buraco?

a) $1\ m/s$ b) $2\ m/s$ c) $3\ m/s$ d) $4\ m/s$ e) $5\ m/s$

9. (AFA – 2009)

O diagrama abaixo representa as posições de dois corpos A e B em função do tempo.

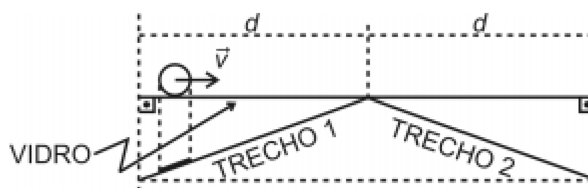


Por este diagrama, afirma-se que o corpo A iniciou o seu movimento, em relação ao corpo B, depois de

a) 2,5 s b) 5,0 s c) 7,5 s d) 10 s

10. (AFA – 2009)

Uma bola rola com velocidade $\vec{v}$, constante, sobre uma superfície de vidro plana e horizontal, descrevendo uma trajetória retilínea. Enquanto a bola se desloca, a sua sombra percorre os planos representados pelos trechos 1 e 2 da figura abaixo, com velocidades escalares médias v_1 e v_2, respectivamente.



Considerando que a sombra está sendo gerada por uma projeção ortogonal à superfície de vidro, pode-se afirmar que o seu movimento é

a) acelerado no trecho 1 e retardado no trecho 2, sendo $v_1 > v > v_2$

b) acelerado nos dois trechos, sendo $v_1 = v_2 > v$

c) uniforme nos dois trechos, sendo $v_1 = v_2 > v$

d) uniforme nos dois trechos, sendo $v_1 = v_2 = v$

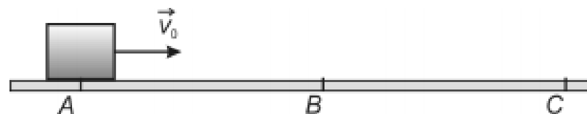
11. (AFA – 2011)

Dois automóveis A e B encontram-se estacionados paralelamente ao marco zero de uma estrada. Em um dado instante, o automóvel A parte, movimentando-se com velocidade escalar constante $v_A = 80\ km/h$. Depois de certo intervalo de tempo, Δt, o automóvel B parte no encalço de A com velocidade escalar constante $v_B = 100\ km/h$. Após $2\ h$ de viagem, o motorista de A verifica que B se encontra $10\ km$ atrás e conclui que o intervalo Δt, em que o motorista B ainda permaneceu estacionado, em horas, é igual a

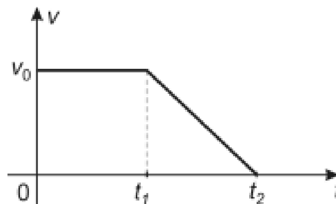
a) 0,25 b) 0,50 c) 1,00 d) 4,00

12. (AFA – 2012)

Um bloco se movimenta retilineamente, do ponto A até o ponto C, conforme figura abaixo.



Sua velocidade v em função do tempo t, ao longo da trajetória, é descrita pelo diagrama $v\ x\ t$ mostrado abaixo.

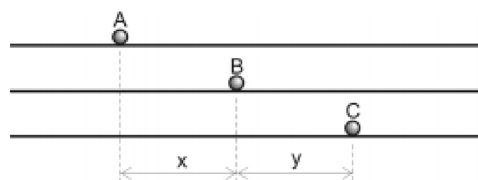


Considerando que o bloco passa pelos pontos A e B nos instantes 0 e t_1, respectivamente, e para no ponto C no instante t_2, a razão entre as distâncias percorridas pelo bloco nos trechos $\overline{BC}$ e $\overline{AB}$, vale

a) $\frac{t_2+t_1}{t_1}$ b) $\frac{(t_2-t_1)^2}{t_2^2}$ c) $\frac{t_2-t_1}{2t_1}$ d) $\frac{t_2+t_1}{2t_2}$

13. (AFA – 2019)

Três partículas, A, B e C, movimentam-se, com velocidades constantes, ao longo de uma mesma direção. No instante inicial, $t_0 = 0$, a distância entre A e B vale x, e entre B e C vale y, como indica a figura a seguir.



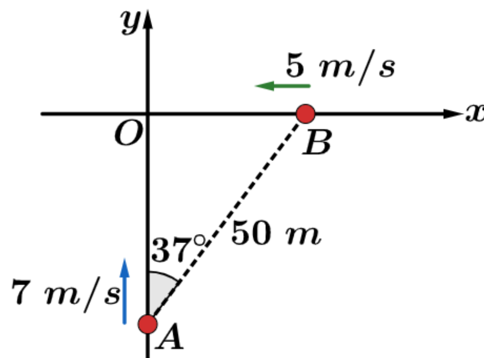
Em $t = 2\ s$, a partícula A cruza com a partícula B. Em $t = 3\ s$, a partícula A cruza com a partícula C. A partícula C alcançará a partícula B no instante dado pela relação

a) $\frac{6y}{2y-x}$ b) $\frac{6(y-x)}{2y-3x}$ c) $\frac{y-x}{3x}$ d) $\frac{3y}{y-x}$

14. (Inédita – Prof. Toni Burgatto)

Duas esferas A e B são lançadas e descrevem um MRU com velocidades iguais a 7 m/s e 5 m/s, respectivamente. A partir do momento mostrado na figura abaixo, o tempo gasto até que as esferas equidistem da origem O é igual:

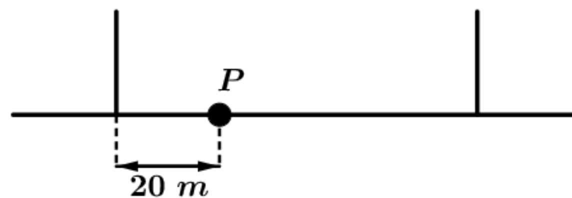
Considere que o $\cos(37°) = 4/5$.



a) 1 s b) 2 s c) 3 s d) 4 s e) 5 s

15. (Inédita – Prof. Toni Burgatto)

Um alto falante (P) está situado entre dois paredões e o som é emitido em direção ao paredão da direita. O eco deste som chega a montanha da esquerda 5 segundo após ser emitido. Sabendo que a velocidade do som é de 340 m/s, a distância entre as paredes é de:



a) 620 m b) 690 m c) 760 m d) 860 m e) 960 m

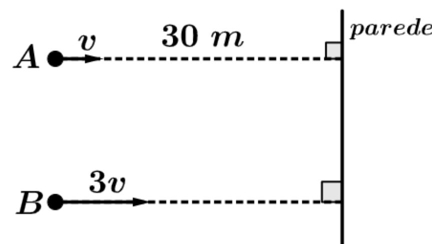
16. (Inédita – Prof. Toni Burgatto)

Três carros A, B e C viajam em uma trajetória retilínea. Sabe-se que o carro A saiu as 8h com uma velocidade de 40 km/h, o carro B saiu as 9h com uma velocidade de 50 km/h e o carro C saiu as 10 h com uma velocidade de 65 km/h. A que horas o carro B estará a uma mesma distância de A e de C?

a) 11h b) 12h c) 13h d) 14h e) 15h

17. (Inédita – Prof. Toni Burgatto)

Duas bolas de tênis A e B são lançadas contra uma parede vertical, simultaneamente, se movendo sobre um piso horizontal perfeitamente liso.



Qual a distância percorrida por B até o instante em que ela cruza com B. Considere que o choque de B com a parede seja perfeitamente elástica.

a) 40 m b) 45 m c) 50 m d) 55 m e) 60 m

18. (Inédita – Prof. Toni Burgatto)

Uma pessoa está correndo paralelamente a uma pista retilínea, a uma distância de 90 metros. De repente, ela vê um amigo se aproximando de carro a uma velocidade de 72 km/h, a uma distância



de 600 metros. O corredor decide correr até encontrar o amigo com uma velocidade de 18 km/h, fazendo o menor ângulo possível com a reta que une corredor ao automóvel. Dessa forma, esse ângulo é de:

a) 37°   b) 45°   c) 53°   d) 60°   e) 74°

19. (Inédita – Prof. Toni Burgatto)

Uma centopeia de tamanho L se move em uma mesa horizontal com velocidade v, em uma trajetória retilínea. Em um certo instante, ela chega na extremidade da mesa e muda de direção, descendo a mesa em uma trajetória vertical. Dessa forma, qual deve ser a distância mínima entre as extremidades da centopeia?

a) $\frac{L}{2}$ b) $\frac{L\sqrt{2}}{3}$ c) $\frac{L\sqrt{2}}{2}$ d) $\frac{L}{4}$ e) $\frac{L}{\sqrt{3}}$



13. Gabarito da lista de questões nível 2 sem comentários

1) S/A
2) B
3) D
4) B
5) D
6) B
7) B
8) E
9) B
10) C
11) B
12) C
13) A
14) E
15) D
16) D
17) B
18) A
19) C





14. Lista de questões nível 2 comentada

1. (EN – 2017)

Um motorista faz uma viagem da cidade A até a cidade B. O primeiro um terço do percurso da viagem ele executa com uma velocidade média de 50 km/h. Em um segundo trecho, equivalente à metade do percurso, ele executa com uma velocidade média de 75 km/h e o restante do percurso faz com velocidade média de 25 km/h. Se a velocidade média do percurso todo foi de 60 km/h, é correto afirmar que, se a distância entre as cidades A e B é de

a) 600 km ele ficou parado, pelo menos, 2,0 h durante a viagem.

b) 600 km ele ficou parado, exatamente, 2,0 h durante a viagem.

c) 500 km ele ficou parado, exatamente, 1,5 h durante a viagem.

d) 500 km ele ficou parado, pelo menos, 1,0 h durante a viagem.

e) 500 km ele ficou parado, exatamente, 1,0 h durante a viagem.

Comentários:

Essa questão apresenta um enunciado inconsistente. Vamos determinar a velocidade média do percurso todo. Para isso, devemos utilizar a definição de velocidade média:

$$v_m = \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

Agora, devemos calcular o tempo que ele leva para percorrer cada trecho:

$$\Delta t_1 = \frac{\frac{\Delta S}{3}}{50} = \frac{\Delta S}{150}$$

$$\Delta t_2 = \frac{\frac{\Delta S}{2}}{75} = \frac{\Delta S}{150}$$

$$\Delta t_3 = \frac{\Delta S - \left(\frac{\Delta S}{3} + \frac{\Delta S}{2}\right)}{25} = \frac{\frac{\Delta S}{6}}{25} = \frac{\Delta S}{150}$$

Portanto:

$$v_m = \frac{\Delta S}{\frac{\Delta S}{150} + \frac{\Delta S}{150} + \frac{\Delta S}{150}}$$

$$v_m = \frac{\Delta S}{\frac{3 \cdot \Delta S}{150}}$$



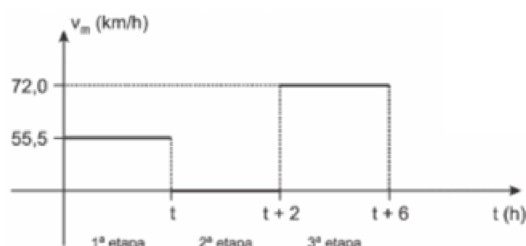
$$v_m = \frac{150}{3} = 50\ km/h$$

Assim, a velocidade média no percurso descrito é de 50 km/h e não de 60 km/h, como afirma o enunciado.

Gabarito: sem alternativa

2. **(EN – 2015)**

Analise o gráfico abaixo:



O trajeto entre duas cidades é de 510 km. Considere um veículo executando esse trajeto. No gráfico acima, temos a velocidade média do veículo em três etapas. Com base nos dados apresentados no gráfico, qual a velocidade média, em km/h, estabelecida pelo veículo no trajeto todo?

a) 48　　b) 51　　c) 54　　d) 57　　e) 60

Comentários:

De acordo com a definição de velocidade média, temos:

$$v_m = \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

Portanto, podemos calcular o deslocamento para cada trecho:

$$\Delta S_1 = 55{,}5 \cdot (t - 0) = 55{,}5 \cdot t$$

$$\Delta S_2 = 0 \cdot (t + 2 - t) = 0$$

$$\Delta S_3 = 72 \cdot \big(t + 6 - (t + 2)\big) = 4 \cdot 72 = 288\ km$$

Como o percurso todo tem 510 km, então:

$$\Delta S_1 + \Delta S_2 + \Delta S_3 = 510$$

$$55{,}5 \cdot t + 0 + 288 = 510$$

$$t = 4h$$

Logo, a velocidade média é dada por:

$$v_m = \frac{\Delta S_1 + \Delta S_2 + \Delta S_3}{\Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3}$$

$$v_m = \frac{222 + 288}{4 + 6} = \frac{510}{10}$$

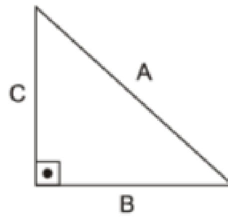
$$\boxed{v_m = 51\ km/h}$$

Gabarito: B

3. **(AFA – 2011)**



Um turista, passeando de bugre pelas areias de uma praia em Natal – RN, percorre uma trajetória triangular, que pode ser dividida em três trechos, conforme a figura abaixo:



Os trechos B e C possuem o mesmo comprimento, mas as velocidades médias desenvolvidas nos trechos A, B e C foram, respectivamente, v, $2v$ e v. A velocidade escalar média desenvolvida pelo turista para percorrer toda a trajetória triangular vale

a) $v\sqrt{2}$ b) $2v\sqrt{2}$ c) $4v$ d) $(4-2\sqrt{2})v$

Comentários:

Para cada trecho, podemos calcular o tempo gasto:

$$t_A = \frac{A}{v}$$

$$t_B = \frac{B}{2v}$$

$$t_C = \frac{C}{v}$$

A velocidade média ao longo de todo o percurso é dada por:

$$v_m = \frac{A+B+C}{t_A+t_B+t_C}$$

Como $B = C$, podemos determinar o valor de A em função de B pelo Teorema de Pitágoras:

$$A^2 = B^2 + C^2$$

$$A^2 = B^2 + C^2$$

$$A^2 = 2B^2$$

$$A = \sqrt{2}B$$

Portanto, a velocidade média é dada por:

$$v_m = \frac{B\sqrt{2}+B+B}{\frac{B\sqrt{2}}{v}+\frac{B}{2v}+\frac{B}{v}}$$

$$v_m = \frac{B(\sqrt{2}+1+1)}{B\left(\frac{\sqrt{2}}{v}+\frac{1}{2v}+\frac{1}{v}\right)}$$

$$v_m = \frac{2+\sqrt{2}}{\frac{2\sqrt{2}+1+2}{2v}}$$



$$v_m = \left(\frac{2(2+\sqrt{2})}{2\sqrt{2}+3}\right)v$$

$$v_m = \frac{2(2+\sqrt{2})(2\sqrt{2}-3)}{(2\sqrt{2}+3)(2\sqrt{2}-3)}$$

$$v_m = \frac{2\left(4\sqrt{2}-6+2(\sqrt{2})^2-3\sqrt{2}\right)}{4\cdot 2-9}v$$

$$v_m = \frac{2(\sqrt{2}-2)}{-1}v$$

$$\boxed{v_m = (4-2\sqrt{2})v}$$

Gabarito: D

---

4. (AFA – 2011)

Dois automóveis A e B encontram-se estacionados paralelamente ao marco zero de uma estrada. Em um dado instante, o automóvel A parte, movimentando-se com velocidade escalar constante $V_A = 80\ km/h$. Depois de certo intervalo de tempo, Δt, o automóvel B parte no encalço de A com velocidade escalar constante $V_B = 100\ km/h$. Após 2h de viagem, o motorista de A verifica que B se encontra $10\ km$ atrás e conclui que o intervalo Δt, em que o motorista B ainda permaneceu estacionado, em horas, é igual a:

a) 0,25 b) 0,50 c) 1,00 d) 4,00

Comentários:

Após duas horas de viagem, B terá deslocado:

$$\Delta S_B = V_B \cdot (2-\Delta t)$$

E A terá andado:

$$\Delta S_A = V_A \cdot 2$$

Como A sabe que B está 10 km atrás, então:

$$\Delta S_A = \Delta S_B + 10$$

$$V_A \cdot 2 = V_B \cdot (2-\Delta t) + 10$$

$$80 \cdot 2 = 100 \cdot (2-\Delta t) + 10$$

$$0{,}8 \cdot 2 = 2 - \Delta t + 0{,}1$$

$$\Delta t = 2 - 1{,}6 + 0{,}1$$

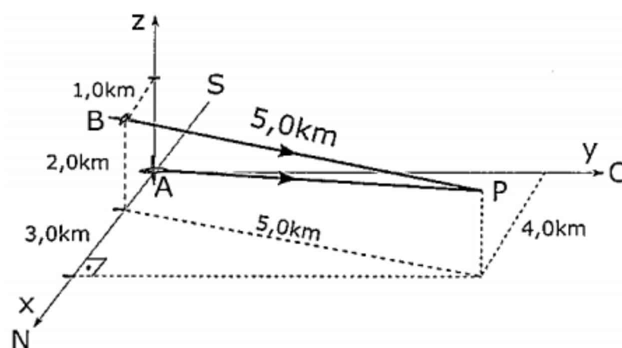
$$\boxed{\Delta t = 0{,}5\ h}$$

Gabarito: B

---

5. (EN – 2019)

Analise o gráfico abaixo.



Uma aeronave de patrulha A segue, com velocidade escalar constante V_A, rumo ao ponto P com a finalidade de interceptar outra aeronave, B, a qual mantém altitude e velocidade escalar constante e, inicialmente, encontra-se $1,00\ km$ ao norte (sentido positivo de x) e $2,00\ km$ acima de A. Sabendo que a aeronave B percorre $5,00\ km$ em $30,0$ segundos antes de ser interceptada no ponto P, a diferença, $V_A - V_B$, entre as velocidades escalares das duas aeronaves, em km/h, é igual a:

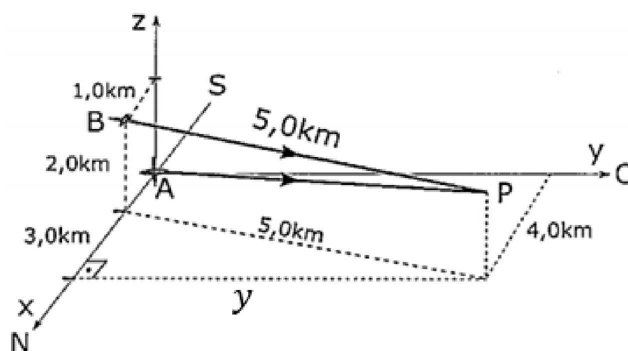
a) 450 b) 300 c) 150 d) 120 e) 90,0

Comentários:

A velocidade de B é dada por:

$$V_B = \frac{5,00}{\frac{30,0}{3600}} = 600\ km/h$$

Nesse intervalo de tempo, A percorre a distância AP, que é dada por:



$$5,0^2 = 3,,0^2 + y^2$$

$$\boxed{y = 4,0\ m}$$

$$AP = \sqrt{4,0^2 + 4,0^2 + 2,0^2}$$

$$AP = \sqrt{36} = 6,0\ m$$

Logo:

$$V_A = \frac{AP}{\Delta t} = \frac{6,0}{\frac{30}{3600}} = 720\ km/h$$



Portanto:

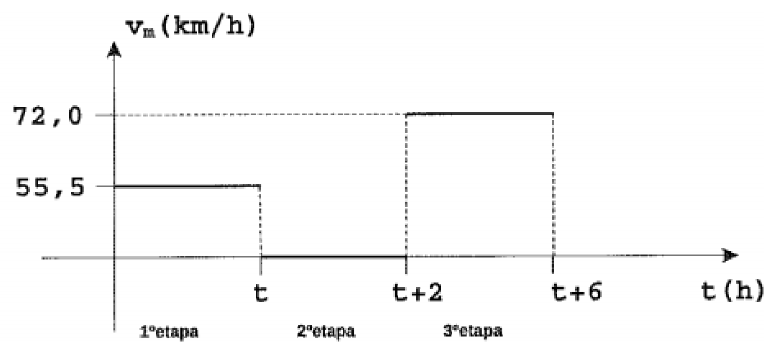
$$\boxed{V_B - V_A = 120\ km/h}$$

Gabarito: D

---

6. (EN – 2015)

Analise o gráfico abaixo.



O trajeto entre duas cidades é de 510 km. Considere um veículo executando esse trajeto. No gráfico acima, temos a velocidade média do veículo em três etapas. Com base nos dados apresentados no gráfico, qual a velocidade média, em km/h, estabelecida pelo veículo no trajeto todo?

a) 48 b) 51 c) 54 d) 57 e) 60

Comentários:

De acordo com o gráfico $v \times t$, sabemos que a área corresponde numericamente o deslocamento do móvel. Portanto:

$$510 = 55{,}5 \cdot t + 72 \cdot \big(t + 6 - (t + 2)\big)$$

$$510 = 55{,}5 \cdot t + 72 \cdot 4$$

$$222 = 55{,}5 \cdot t$$

$$\boxed{t = 4\ h}$$

Logo, a velocidade média do corpo é dada por:

$$v = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{510}{t + 6} = \frac{510}{4 + 6}$$

$$\boxed{v = 51\ km/h}$$

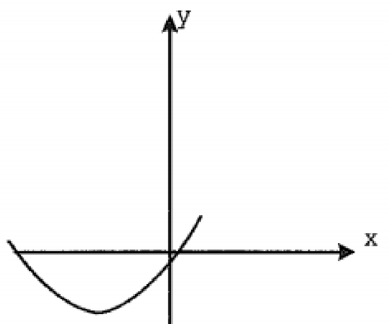
Gabarito: B

---

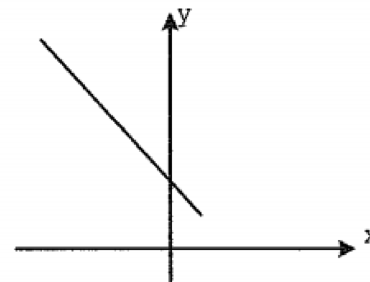
7. (EN – 2014)

Considere uma partícula se movimentando no plano xy. As coordenadas x e y da posição da partícula em função do tempo são dadas por $x(t) = -2t^2 + 2t + 1$ e $y(t) = t^2 - t + 2$, com x e y em metros e t em segundos. Das opções abaixo, assinale a que pode representar o gráfico da trajetória da partícula de $t = 0$ a $t = 4\ s$.

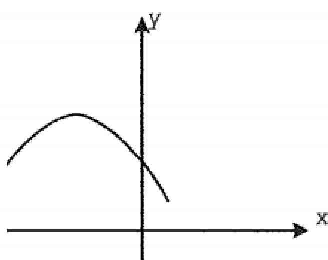
a)



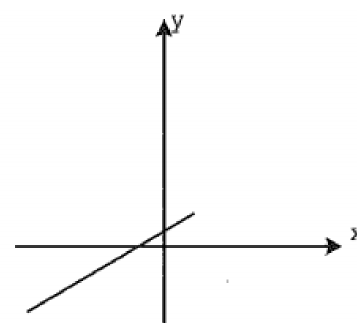
b)



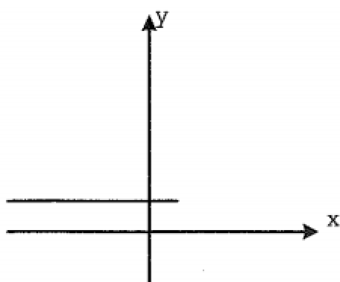
c)



d)



e)



Comentários:

De acordo com as equações horárias, temos:

$$x(t) = -2t^2 + 2t + 1$$

$$y(t) = t^2 - t + 2$$

Fazendo $2 \cdot y + x$, vem:

$$2 \cdot y + x = 2 \cdot (t^2 - t + 2) + (-2t^2 + 2t + 1)$$

$$2y + x = 2t^2 - 2t + 2 \cdot 2 - 2t^2 + 2t + 1$$

$$\boxed{2y + x = 5}$$

Uma reta decrescente, que passa por $y = 5/2$ e $x = 5$. Portanto, apenas o gráfico da letra B é possível.

Gabarito: B

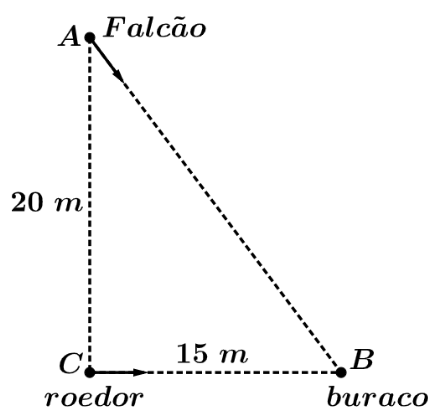
8. (Simulado EFOMM)

Um roedor se encontra a 20 m debaixo de um falcão e, ao perceber que será atacado, foge retilineamente para um buraco, que se encontra a 15 m, com uma velocidade constante de 3 m/s. Qual deve ser a velocidade média do falcão, se este alcança o roedor no exato momento em que ele entra no buraco?

a) 1 m/s b) 2 m/s c) 3 m/s d) 4 m/s e) 5 m/s

Comentários:

Esquematicamente, temos:



Pela geometria, temos que $AB = 25\ m$ e a velocidade média do falcão é dada por:

$$v = \frac{AB}{\Delta t}$$

Pelo movimento do roedor, temos:

$$BC = v_{roedor} \cdot \Delta t$$

$$15 = 3 \cdot \Delta t \therefore \Delta t = 5\ s$$

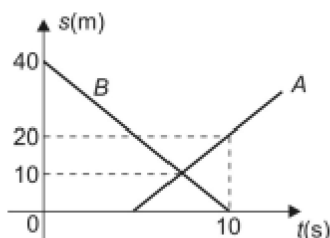
Portanto:

$$v = \frac{25}{5} = 5\ m/s$$

Gabarito: E

9. (AFA – 2009)

O diagrama abaixo representa as posições de dois corpos A e B em função do tempo.



Por este diagrama, afirma-se que o corpo A iniciou o seu movimento, em relação ao corpo B, depois de

a) 2,5 s b) 5,0 s c) 7,5 s d) 10 s

Comentários:

De acordo com o gráfico, a função horária do espaço de B é dada por:

$$S_B(t) = S_{0_B} + v_B \cdot t$$

$$S_B(0) = S_{0_B} = 40\ m$$

$$v_B = \frac{0-40}{10-0} = -4\ m/s$$

Então:

$$S_B(t) = 40 - 4 \cdot t$$

Por outro lado, a função horária do espaço de A é expressa por:

$$S_A(t) = S_{0_A} + v_A \cdot t$$

$$S_A(10) = S_{0_A} + v_A \cdot 10$$

$$S_A(10) = 20$$

$$S_{0_A} + v_A \cdot 10 = 20\ (eq. 1)$$

Mas, quando o ponto onde $S_A = S_B$ é igual a $10\ m$, então, por B, podemos determinar o tempo quando isto ocorre:

$$S_B(t) = 10$$

$$40 - 4 \cdot t = 10$$

$$\boxed{t = 7{,}5\ s}$$

Portanto:

$$S_A(7{,}5) = S_{0_A} + v_A \cdot 7{,}5$$

$$S_A(7{,}5) = 10$$

$$S_{0_A} + v_A \cdot 7{,}5 = 10\ (eq. 2)$$

Fazendo 1 – 2, temos:

$$S_{0_A} + v_A \cdot 10 - \left(S_{0_A} + v_A \cdot 7{,}5\right) = 20 - 10$$

$$2{,}5 \cdot v_A = 10$$

$$v_A = 4{,}0\ m/s$$

Substituindo em 1, temos:

$$S_{0_A} + \underbrace{v_A}_{4,0} \cdot 10 = 20$$

$$S_{0_A} = -20$$

Logo:

$$S_A(t) = -20 + 4 \cdot t$$

Quando $S_A = 0$, temos a origem do movimento de A, que ocorre em t igual a:

$$S_A(t) = 0$$

$$-20 + 4 \cdot t = 0$$

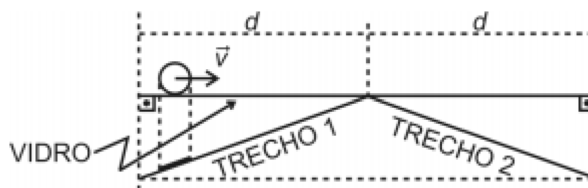
$$\boxed{t = 5,0\ s}$$

Gabarito: B

---

10. (AFA – 2009)

Uma bola rola com velocidade $\vec{v}$, constante, sobre uma superfície de vidro plana e horizontal, descrevendo uma trajetória retilínea. Enquanto a bola se desloca, a sua sombra percorre os planos representados pelos trechos 1 e 2 da figura abaixo, com velocidades escalares médias v_1 e v_2, respectivamente.



Considerando que a sombra está sendo gerada por uma projeção ortogonal à superfície de vidro, pode-se afirmar que o seu movimento é

a) acelerado no trecho 1 e retardado no trecho 2, sendo $v_1 > v > v_2$

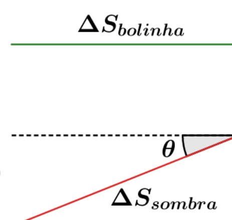
b) acelerado nos dois trechos, sendo $v_1 = v_2 > v$

c) uniforme nos dois trechos, sendo $v_1 = v_2 > v$

d) uniforme nos dois trechos, sendo $v_1 = v_2 = v$

Comentários:

Podemos relacionar os deslocamentos da bolinha e de suas sombras através da geometria do problema.



Em que θ é a inclinação formada pelos trechos com a horizontal. Vamos admitir que cada trecho forma o mesmo ângulo θ com a horizontal. Assim, podemos relacionar os deslocamentos da bolinha e das sombras:

$$\Delta S_{bolinha} = \Delta S_{sombra} \cdot \cos\theta$$

Tomando intervalos de tempos iguais nos dois trechos, temos que:

$$v = \frac{\Delta S_{bolinha}}{\Delta t} = \frac{\Delta S_{sombra} \cdot \cos\theta}{\Delta t} = \underbrace{\frac{\Delta S_{sombra}}{\Delta t}}_{v_1\ ou\ v_2} \cdot \cos\theta$$

Note que em tempos iguais, as sombras andam distâncias iguais, dado a simetria da figura, portanto:

$$v_1 = v_2$$

E:

$$v = v_1 \cdot \cos\theta = v_2 \cdot \cos\theta$$

Como $\cos\theta < 1$, então:

$$v < v_1 = v_2$$

Dado a relação geométrica imposta pelo problema, o movimento das sombras também deve ser uniforme.

Gabarito: C

---

11. (AFA – 2011)

Dois automóveis A e B encontram-se estacionados paralelamente ao marco zero de uma estrada. Em um dado instante, o automóvel A parte, movimentando-se com velocidade escalar constante $v_A = 80\ km/h$. Depois de certo intervalo de tempo, Δt, o automóvel B parte no encalço de A com velocidade escalar constante $v_B = 100\ km/h$. Após $2\ h$ de viagem, o motorista de A verifica que B se encontra $10\ km$ atrás e conclui que o intervalo Δt, em que o motorista B ainda permaneceu estacionado, em horas, é igual a

a) 0,25 b) 0,50 c) 1,00 d) 4,00

Comentários:

Colocando o marco zero quando B inicia seu movimento, temos que o espaço inicial de A é dado por:

$$S_{0_A} = v_A \cdot \Delta t$$

Logo:

$$S_A = v_A \cdot \Delta t + v_A \cdot t$$

$$S_B = v_B \cdot t$$

Após 2h de viagem, temos que B encontra-se 10 km atrás de A, então:

$$S_A = S_B + 10$$

$$v_A \cdot \Delta t + v_A \cdot (2 - \Delta t) = v_B \cdot (2 - \Delta t)$$

Como colocamos a origem do tempo após o intervalo de tempo Δt, então devemos contar o tempo de deslocamento como $t - t_0 = t - \Delta t$. Então:

$$2 \cdot v_A = 2 \cdot v_B - v_B \cdot \Delta t + 10$$

$$\Delta t = 2 \cdot \frac{v_B - v_A}{v_B} + \frac{10}{v_B}$$

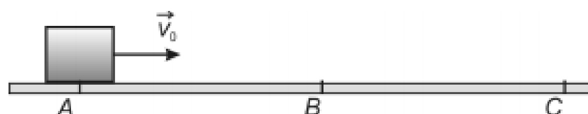
$$\Delta t = 2 \cdot \frac{100 - 80}{100} + \frac{10}{100} = 0{,}5\ h$$

Gabarito: B

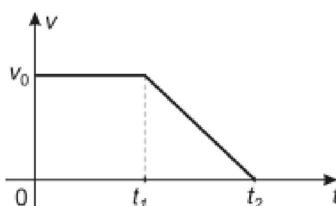
---

12. (AFA – 2012)

Um bloco se movimenta retilineamente, do ponto A até o ponto C, conforme figura abaixo.



Sua velocidade v em função do tempo t, ao longo da trajetória, é descrita pelo diagrama $v\ x\ t$ mostrado abaixo.



Considerando que o bloco passa pelos pontos A e B nos instantes 0 e t_1, respectivamente, e para no ponto C no instante t_2, a razão entre as distâncias percorridas pelo bloco nos trechos $\overline{BC}$ e $\overline{AB}$, vale

a) $\frac{t_2+t_1}{t_1}$ b) $\frac{(t_2-t_1)^2}{t_2^2}$ c) $\frac{t_2-t_1}{2t_1}$ d) $\frac{t_2+t_1}{2t_2}$

Comentários:

De acordo com o gráfico $v \times t$, a área do sob a curva corresponde numericamente a variação do espaço. Então:

$$\overline{AB} = v_0 \cdot t_1$$

Para $\overline{BC}$, temos:

$$\overline{BC} = \frac{v_0 \cdot (t_2 - t_1)}{2}$$

Fazendo a relação desejada, vem:

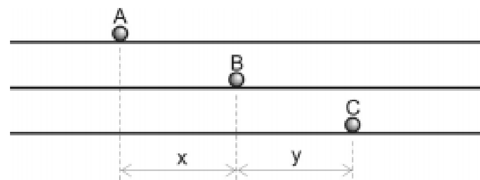


$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\frac{v_0 \cdot (t_2 - t_1)}{2}}{v_0 \cdot t_1} \therefore \boxed{\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{(t_2 - t_1)}{2t_1}}$$

Gabarito: C

13. (AFA – 2019)

Três partículas, A, B e C, movimentam-se, com velocidades constantes, ao longo de uma mesma direção. No instante inicial, $t_0 = 0$, a distância entre A e B vale x, e entre B e C vale y, como indica a figura a seguir.



Em $t = 2\ s$, a partícula A cruza com a partícula B. Em $t = 3\ s$, a partícula A cruza com a partícula C. A partícula C alcançará a partícula B no instante dado pela relação

a) $\frac{6y}{2y-x}$ b) $\frac{6(y-x)}{2y-3x}$ c) $\frac{y-x}{3x}$ d) $\frac{3y}{y-x}$

Comentários:

Inicialmente, vamos escrever a função horária do espaço para cada móvel:

$$\begin{cases} s_A = v_A \cdot t \\ s_B = x + v_B \cdot t \\ s_C = x + y + v_B \cdot t \end{cases}$$

Em $t = 2\ s$, a partícula A cruza com a partícula B, isto é, elas possuem a mesma posição do espaço:

$$s_A = s_B$$

$$v_A \cdot t = x + v_B \cdot t$$

$$v_A \cdot 2 = x + v_B \cdot 2\ (eq. 1)$$

Em $t = 3\ s$, a partícula A cruza com a partícula C, ou seja, elas possuem a mesma posição do espaço:

$$s_A = s_C$$

$$v_A \cdot t = x + y + v_C \cdot t$$

$$v_A \cdot 3 = x + y + v_C \cdot 3\ (eq. 2)$$

Quando a partícula C alcançar a partícula B, temos:

$$s_C = s_B$$

$$x + y + v_C \cdot t_e = x + v_B \cdot t_e$$



$$t_e = \frac{y}{v_B - v_C}$$

Dividindo a equação 1 por 2, temos:

$$\frac{2v_A}{3v_A} = \frac{x + v_B \cdot 2}{x + y + v_C \cdot 3}$$

$$2x + 2y + 6v_C = 3x + 6v_B \Rightarrow v_B - v_C = \frac{2y - x}{6}$$

Portanto:

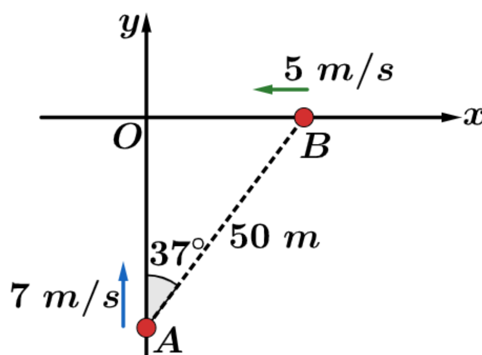
$$t_e = \frac{y}{\frac{2y - x}{6}} \therefore \boxed{t_e = \frac{6y}{2y - x}}$$

Gabarito: A

14. (Inédita – Prof. Toni Burgatto)

Duas esferas A e B são lançadas e descrevem um MRU com velocidades iguais a 7 m/s e 5 m/s, respectivamente. A partir do momento mostrado na figura abaixo, o tempo gasto até que as esferas equidistem da origem O é igual:

Considere que o $\cos(37°) = 4/5$.



a) 1 s
b) 2 s
c) 3 s
d) 4 s
e) 5 s

Comentários:

Quando eles estiverem a uma distância x da origem, teremos que:

$$x + 5 \cdot t = 50 \cdot \underbrace{sen(37°)}_{=3/5}$$

$$x + 7 \cdot t = 50 \cdot \underbrace{\cos(37°)}_{=4/5}$$

Portanto:

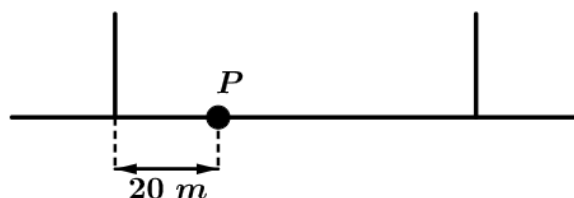
$$\begin{cases} x + 5t = 30 \\ x + 7t = 40 \end{cases}$$

$$2t = 10 \Rightarrow t = 5\ s$$

Gabarito: E

15. (Inédita – Prof. Toni Burgatto)

Um alto falante (P) está situado entre dois paredões e o som é emitido em direção ao paredão da direita. O eco deste som chega a montanha da esquerda 5 segundo após ser emitido. Sabendo que a velocidade do som é de 340 m/s, a distância entre as paredes é de:



a) $620\ m$ b) $690\ m$ c) $760\ m$ d) $860\ m$ e) $960\ m$

Comentários:

Pelo enunciado, o som sai de P em direção ao paredão da direita, percorrendo uma distância d_1 em um certo intervalo de tempo t_1, tal que:

$$d_1 = v_s \cdot t_1$$

Após reflexão no paredão da direita, ele retorna para o paredão da direita, percorrendo a distância entre os paredões e gastando um tempo t_2, de tal forma que:

$$d_2 = v_s \cdot t_2$$

Note que:

$$d_1 + 20 = d_2$$

Como o tempo informado é $t_1 + t_2$, então vamos somar d_2 dos dois lados da equação logo acima:

$$d_1 + d_2 + 20 = 2d_2$$

$$v_s \cdot t_1 + v_s \cdot t_2 + 20 = 2d_2$$

$$v_s \underbrace{(t_1 + t_2)}_{=5\ s} + 20 = 2d_2$$

$$340 \cdot 5 + 20 = 2d_2$$

$$\boxed{d_2 = 860\ m}$$

Gabarito: D

16. (Inédita – Prof. Toni Burgatto)

Três carros A, B e C viajam em uma trajetória retilínea. Sabe-se que o carro A saiu as 8h com uma velocidade de 40 km/h, o carro B saiu as 9h com uma velocidade de 50 km/h e o carro C saiu as 10 h com uma velocidade de 65 km/h. A que horas o carro B estará a uma mesma distância de A e de C?

a) 11h b) 12h c) 13h d) 14h e) 15h



Comentários:

Podemos escrever o espaço de cada móvel como sendo:

$$s_A = v_A(t - t_A)$$

$$s_B = v_B(t - t_B)$$

$$s_C = v_C(t - t_C)$$

Quando B estiver equidistante de A e de C então ele estará no ponto médio de A e de C. Então:

$$s_B = \frac{s_A + s_C}{2}$$

$$2s_B = s_A + s_C$$

Se adotarmos o tempo de A como sendo a origem dos tempos, às 8h, então:

$$2 \cdot v_B(t - 1) = v_A(t - 0) + v_C(t - 2)$$

$$2 \cdot 50 \cdot t - 2 \cdot 50 \cdot 1 = 40t + 65t - 65 \cdot 2$$

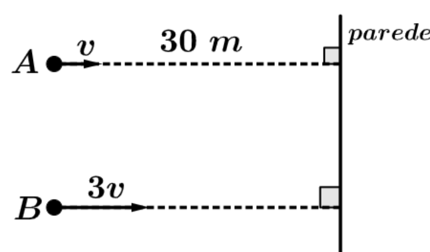
$$5t = 30 \therefore \boxed{t = 6\,h}$$

Gabarito: D

---

17. (Inédita – Prof. Toni Burgatto)

Duas bolas de tênis A e B são lançadas contra uma parede vertical, simultaneamente, se movendo sobre um piso horizontal perfeitamente liso.



Qual a distância percorrida por B até o instante em que ela cruza com B. Considere que o choque de B com a parede seja perfeitamente elástica.

a) 40 m b) 45 m c) 50 m d) 55 m e) 60 m

Comentários:

O tempo gasto para B chegar na parede é de:

$$t_1 = \frac{30}{3v} = \frac{10}{v}$$

Nesse mesmo intervalo de tempo, A deve ter andado:

$$d_A = v \cdot \frac{10}{v} = 10\,m$$



Quando houver o cruzamento das bolas, temos:

$$\Delta t_A = \Delta t_B \Rightarrow \frac{\Delta s_A}{v} = \frac{\Delta s_B}{3v}$$

$$\frac{x}{v} = \frac{20 - x}{3v}$$

$$3x = 20 - x \therefore \boxed{x = 5\,m}$$

Portanto, o deslocamento total de B é igual a:

$$d_B = 30 + 15 = 45\,m$$

Gabarito: B

---

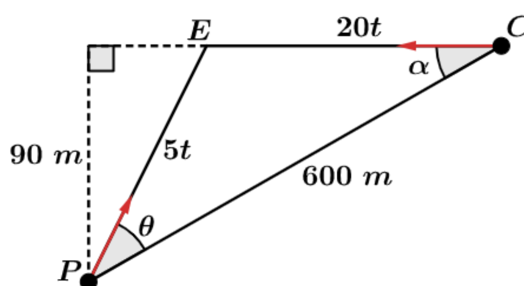
18. (Inédita – Prof. Toni Burgatto)

Uma pessoa está correndo paralelamente a uma pista retilínea, a uma distância de 90 metros. De repente, ela vê um amigo se aproximando de carro a uma velocidade de 72 km/h, a uma distância de 600 metros. O corredor decide correr até encontrar o amigo com uma velocidade de 18 km/h, fazendo o menor ângulo possível com a reta que une corredor ao automóvel. Dessa forma, esse ângulo é de:

a) 37° b) 45° c) 53° d) 60° e) 74°

Comentários:

Esquematicamente, temos:



Pela lei dos senos, temos:

$$\frac{EC}{sen(\theta)} = \frac{PE}{sen(\alpha)}$$

$$\frac{20t}{sen(\theta)} = \frac{5t}{sen(\alpha)}$$

$$4sen(\alpha) = sen(\theta)$$

Mas:

$$sen(\alpha) = \frac{90}{600} = \frac{9}{60} = \frac{3}{20}$$

Portanto:



$$4 \cdot \frac{3}{20} = sen(\theta)$$

$$sen(\theta) = \frac{3}{5} \Rightarrow \theta \approx 37°$$

Gabarito: A

---

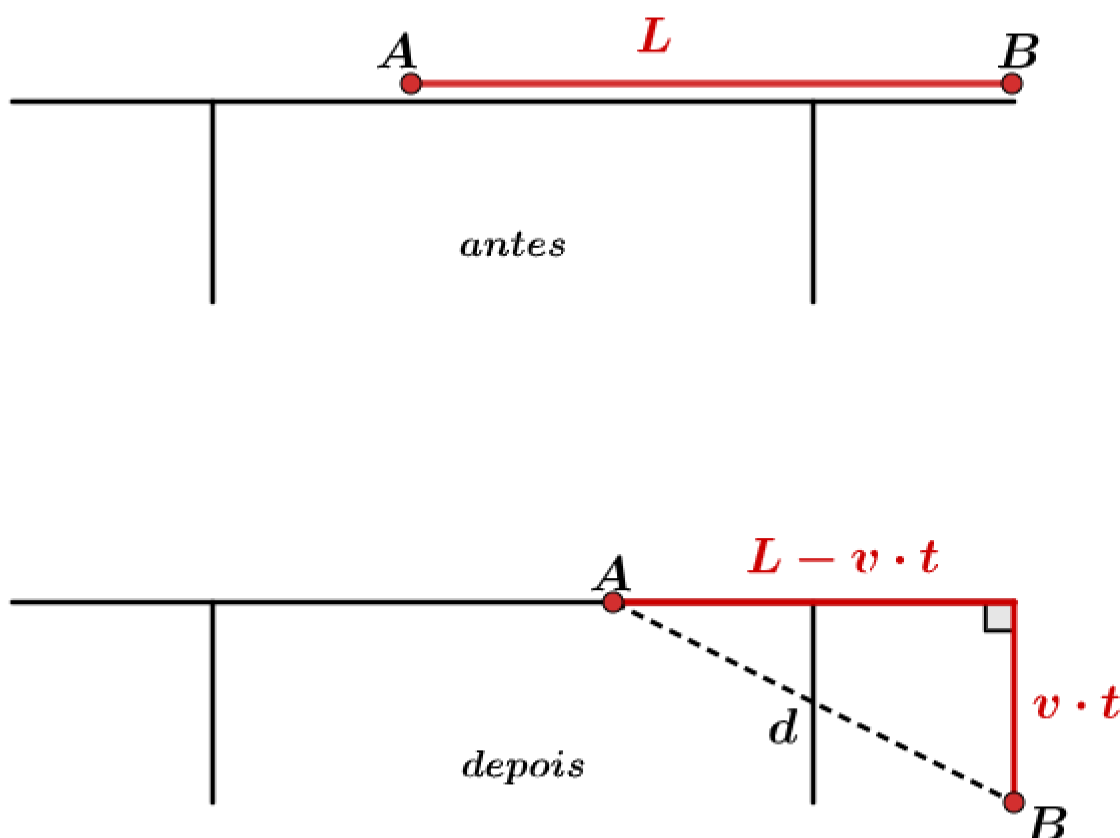
19. (Inédita – Prof. Toni Burgatto)

Uma centopeia de tamanho L se move em uma mesa horizontal com velocidade v, em uma trajetória retilínea. Em um certo instante, ela chega na extremidade da mesa e muda de direção, descendo a mesa em uma trajetória vertical. Dessa forma, qual deve ser a distância mínima entre as extremidades da centopeia?

a) $\frac{L}{2}$ b) $\frac{L\sqrt{2}}{3}$ c) $\frac{L\sqrt{2}}{2}$ d) $\frac{L}{4}$ e) $\frac{L}{\sqrt{3}}$

Comentários:

Vamos tomar o instante zero quando ela começa a mudar de direção. Se ela percorre uma distância $x = vt$, então o comprimento da centopeia na vertical será vt e a comprimento que resta na mesa é $L - vt$. Portanto, a distância entre as extremidades da centopeia é de:



$$d^2 = (L - vt)^2 + (vt)^2$$

Para determinar $d_{mín}$, vamos fazer o seguinte rearranjo algébrico:

$$d^2 = L^2 - 2 \cdot L \cdot (vt) + (vt)^2 + (vt)^2$$



$$d^2 = L^2 + 2\left((vt)^2 - 2 \cdot \frac{L}{2} \cdot (vt) + \left(\frac{L}{2}\right)^2 - \left(\frac{L}{2}\right)^2\right)$$

$$d^2 = L^2 - 2\left(\frac{L}{2}\right)^2 + 2 \cdot \left((vt) - \frac{L}{2}\right)^2$$

$$d^2 = \frac{L^2}{2} + 2 \cdot \left((vt) - \frac{L}{2}\right)^2$$

Analisando d em função do tempo, podemos dizer que d é mínimo quando $(vt) - \frac{L}{2} = 0$. Portanto:

$$d_{mín} \rightarrow (vt) - \frac{L}{2} = 0$$

$$t = \frac{L}{2v}$$

E:

$$d_{mín}^2 = \frac{L^2}{2} \therefore \boxed{d_{mín} = \frac{L\sqrt{2}}{2}}$$

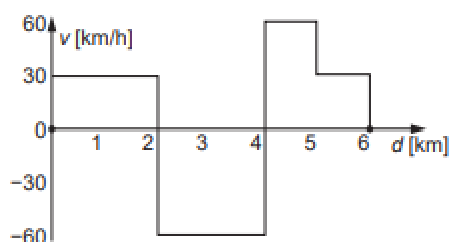
Gabarito: C



15. Lista de questões nível 3

1. (ITA 2017)

Um automóvel percorre um trecho retilíneo de uma rodovia. A figura mostra a velocidade do carro em função da distância percorrida, em km, indicada no odômetro. Sabendo que a velocidade escalar média no percurso é de 36 km/h, assinale respectivamente o tempo total dispendido e a distância entre os pontos inicial e final do percurso.



a) 9 min e 2 km b) 10 min e 2 km c) 15 min e 2 km

d) 15 min e 3 km　　　　e) 20 min e 2 km

2. (ITA 1978)

Um motorista deseja perfazer a distância de 20 km com velocidade escalar média de 80 km/h. Se viajar durante os primeiros 15 minutos com velocidade de 40 km/h, com que velocidade escalar média deverá fazer o percurso restante?

a) 120 km/h

b) 160 km/h

c) É impossível estabelecer a velocidade média desejada nas circunstâncias apresentadas

d) Nula

e) Nenhuma das afirmações acima é correta

3.

São dados um navio N e um porto P; o navio movendo-se sobre a reta PN com velocidade v_N. Do porto emite-se um sinal sonoro breve simultaneamente na água e no ar; ele se propaga com velocidades v_1 e v_2 através da água e do ar, respectivamente. No navio, os sons incidentes através da água e do ar são recebidos em instantes separados por um intervalo de tempo Δt. A distância D que separa o navio do porto, no instante em que é recebido o sinal transmitido pela água, vale:

a) $D = \frac{v_1 v_2}{v_1 - v_2} . \left(1 + \frac{v_N}{v_2}\right) \Delta t$　　　　b) $D = \frac{v_1 v_2}{v_1 + v_2} . \left(1 - \frac{v_N}{v_2}\right) \Delta t$

c) $D = \frac{v_1 v_2}{v_1 - v_2} . \left(1 - \frac{v_N}{v_2}\right) \Delta t$　　　　d) $D = \frac{v_1 v_2}{v_1 - v_2} . \left(1 - \frac{v_N}{v_1}\right) \Delta t$

e) $D = \frac{v_1 v_2}{v_1 - v_2} . \left(1 + \frac{v_2}{v_N}\right) \Delta t$

4.

São dadas duas localidades A e B interligadas por rodovia sensivelmente reta; a distância entre as duas cidades é D. O transporte de passageiros de uma localidade à outra pode ser feito por automóvel (velocidade média v_1) ou por avião (velocidade média v_2 desconhecida). Junto à rodovia há, entre A e B, uma localidade C à distância X (incógnita) de A. Um automóvel e um avião partem simultaneamente de A com destino a B. No mesmo instante em que o automóvel passa por C, o avião atinge B. Mais tarde, ambos os móveis partem simultaneamente de B com destino a A. O avião atinge A com antecedência “K” em relação ao instante em que o carro passa por C. Os valores de v_2 e X valem respectivamente:

a) $\frac{Dv_1}{D - kv_1}$ e $\frac{D - kv_1}{2}$　　　　b) $\frac{Dv_1}{D - 2kv_1}$ e $\frac{D - kv_1}{2}$　　　　c) $\frac{2Dv_1}{D - kv_1}$ e $\frac{D - kv_1}{2}$

d) $\frac{Dv_1}{2D + kv_1}$ e $\frac{D + kv_1}{2}$　　　　e) $\frac{4Dv_1}{D - kv_1}$ $e\ D - 2kv_1$

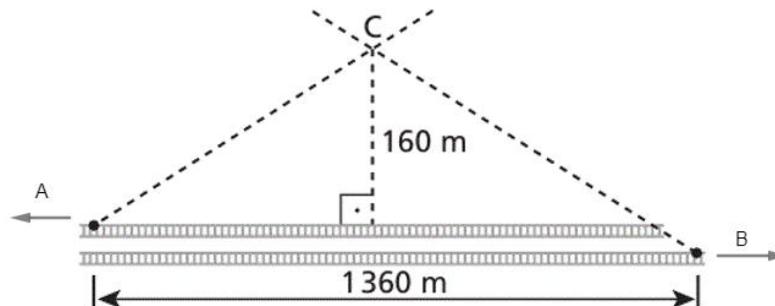
5. (ITA)

Um avião voando horizontalmente a 4000 m de altura numa trajetória retilínea com velocidade constante passou por um ponto A e depois por um ponto B situado a 3000 m do primeiro. Um observador no solo, parado no ponto verticalmente abaixo de B, começou a ouvir o som do avião, emitido em A, 4,00 segundos antes de ouvir o som proveniente de B. Se a velocidade do som no ar era de 320 m/s, qual era velocidade do avião?

a) 960 m/s　　　b) 750 m/s　　　c) 390 m/s　　　d) 421 m/s　　　e) 292 m/s

6. (ITA-1991)

A figura representa uma vista aérea de um trecho retilíneo de ferrovia. Duas locomotivas a vapor, A e B, deslocam-se em sentidos contrários com velocidades constantes de $50{,}4\ km/h$ e $72\ km/h$, respectivamente. Uma vez que AC corresponde ao rastro da fumaça do trem A, BC ao rastro da fumaça do trem B e que $AC = BC$, determine a velocidade do vento. Despreze a distância entre os trilhos de A e B.

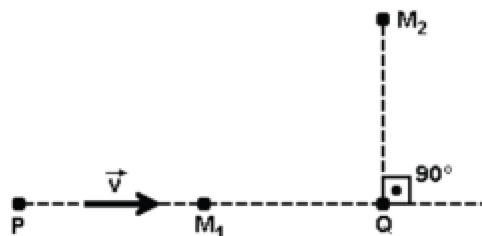


a) 5,00 m/s b) 4,00 m/s c) 17,5 m/s

d) 18,0 m/s e) 14,4 m/s

7. (ITA-2007)

Considere que num tiro de revolver, a bala percorre trajetória retilínea com velocidade V constante, desde o ponto inicial P até o alvo Q. Mostrados na figura abaixo, o aparelho M_1 registra simultaneamente o sinal sonoro do disparo e o do impacto da bala no alvo, o mesmo ocorrendo com o aparelho M_2. Sendo V_s a velocidade do som no ar, então a razão entre as respectivas distâncias dos aparelhos M_1 e M_2 em relação ao alvo Q é:

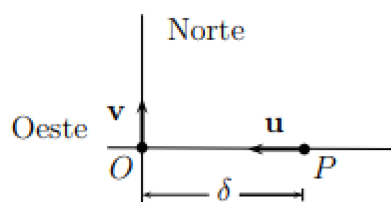


a) $\frac{V_s(V-V_s)}{V_s^2-V^2}$ b) $\frac{V_s(V_s-V)}{V^2-V_s^2}$ c) $\frac{V(V-V_s)}{V_s^2-V^2}$

d) $\frac{V_s(V+V_s)}{V^2-V_s^2}$ e) $\frac{V_s(V-V_s)}{V^2+V_s^2}$

8. (ITA - 2013)

Ao passar pelo ponto O, um helicóptero segue na direção norte com velocidade v constante. Nesse momento, um avião passa pelo ponto P, a uma distância δ de O, e voa para o oeste, em direção a O, com velocidade u também constante, conforme mostra a figura. Considerando t o instante em que a distância d entre o helicóptero e o avião for mínima, assinale a alternativa correta.



a) A distância percorrida pelo helicóptero no instante em que o avião alcança o ponto O é



$\frac{\delta u}{v}$.

b) A distância do helicóptero ao ponto O no instante t é igual a $\frac{\delta v^2}{u^2+v^2}$.

c) A distância do avião ao ponto O no instante t é igual a $\frac{\delta v^2}{v^2+u^2}$.

d) O instante t é igual a $\frac{\delta v}{v^2+u^2}$.

e) A distância d é igual a $\frac{\delta u}{\sqrt{v^2+u^2}}$.

9. (Saraeva/ITA - 1988)

Três turistas, que possuem bicicleta, devem chegar ao centro turístico o menor espaço de tempo) o tempo conta-se até que o último turista chegue ao centro). A bicicleta pode transportar duas pessoas e por isso o terceiro turista deve ir a pé. Um ciclista leva o segundo turista até um determinado ponto do caminho, de onde este continua a andar a pé e o ciclista regressa para transportar o terceiro. Encontre a velocidade média dos turistas, sendo a velocidade do que vai a pé $v_1 = 4\ km/h$ e a do ciclista $v_2 = 20\ km/h$.

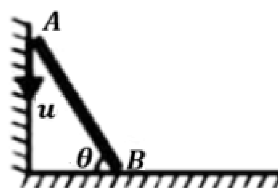
10. (Inédita - Prof. Toni Burgatto)

Duas cidades A e B são ligadas por um serviço de ônibus com um ônibus deixando cada cidade em T minutos. Um jovem ciclista com velocidade de 20 km/h na direção de A para B nota que um ônibus passa por ele a cada 18 minutos na direção de movimento dele e a cada 6 minutos na direção oposta. Se os ônibus se movem com velocidade constante, o período de T é igual a:

(A) 6 min
(B) 7,5 min
(C) 9 min
(D) 10 min
(E) 12 min

11. (Inédita - Prof. Toni Burgatto)

Uma barra rígida está apoiada sobre duas paredes. Sabe-se que a velocidade da extremidade A é igual a u e essa extremidade sempre se move na vertical com a parede. Se a barra se move com velocidade constante na direção vertical, então a velocidade da extremidade B é dada por:



(A) $u \cdot cotg(\theta)$
(B) $\frac{u}{sen(\theta)}$
(C) $\frac{u}{\cos(\theta)}$
(D) $u \cdot tg(\theta)$
(E) $u \cdot tg(2\theta)$

GABARITO





16. Gabarito da lista de questões nível 3 sem comentários

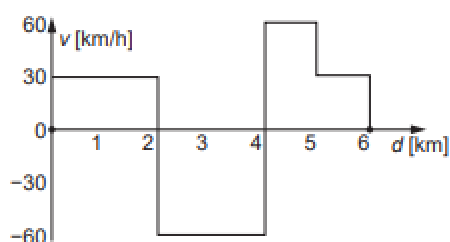
1) B
2) C
3) C
4) C
5) D
6) A
7) A
8) C
9) 10 km/h
10) C
11) D



17. Lista de questões nível 3 comentada

1. (ITA 2017)

Um automóvel percorre um trecho retilíneo de uma rodovia. A figura mostra a velocidade do carro em função da distância percorrida, em km, indicada no odômetro. Sabendo que a velocidade escalar média no percurso é de 36 km/h, assinale respectivamente o tempo total dispendido e a distância entre os pontos inicial e final do percurso.



a) 9 min e 2 km

b) 10 min e 2 km

c) 15 min e 2 km

d) 15 min e 3 km

e) 20 min e 2 km

Comentários:

Analisando o gráfico, observamos que o móvel percorre 2 km para frente e 2 km para trás, retornando para a posição inicial. Depois, ele percorre dois trechos para frente, ambos de 1 km. Dessa forma, o Δs do percurso é dado por $\Delta s = s_{final} - s_{inicial} = 2\ km$.

Entretanto, a distância percorrida pelo móvel é o módulo dos deslocamentos, isto é:

$$d = |\Delta s_{0\to 2}| + |\Delta s_{2\to 4}| + |\Delta s_{4\to 6}| = 2 + 2 + 2 = 6$$

Para o percurso todo, temos que: $v_m = \frac{d}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}h = 10\ min$. Se contarmos o tempo para cada trecho, podemos calcular o tempo total também:

$$\Delta t = \frac{2}{30} + \frac{2}{60} + \frac{1}{60} + \frac{1}{30} = \frac{9}{60}h = 9\ min$$

Portanto, concluímos que o móvel esteve parado por 1 min.

Observação: a rigor, a velocidade escalar média é definida pela razão entre a variação de posição Δs e a variação do tempo Δt. Assim, teríamos que:

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{2}{36} = 3min20s$$

Gabarito: B



2. (ITA 1978)

Um motorista deseja perfazer a distância de 20 km com velocidade escalar média de 80 km/h. Se viajar durante os primeiros 15 minutos com velocidade de 40 km/h, com que velocidade escalar média deverá fazer o percurso restante?

a) 120 km/h

b) 160 km/h

c) É impossível estabelecer a velocidade média desejada nas circunstâncias apresentadas

d) Nula

e) Nenhuma das afirmações acima é correta

Comentários:

A distância total é de 20 km. Se ele viajar durante 15 min com velocidade de 40 km/h, ele deslocará:

$$\Delta s_1 = 40 \frac{km}{h} . \frac{15}{60} h = 10\ km$$

Logo, restarão 10 km. Nestes últimos 10 km ele deverá andar a uma velocidade que compensará o fato dele andar mais lento no primeiro trecho de forma que a velocidade escalar média (v_m) dele nos 20 km seja 80 km/h. Então, vamos calcular v_m:

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} \Rightarrow 80 = \frac{20}{\frac{15}{60} + \Delta t_2}$$

$$\Rightarrow \frac{15}{60} + \Delta t_2 = \frac{20}{80} \Rightarrow \frac{1}{4} + \Delta t_2 = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \Delta t_2 = 0$$

Perceba que para ele andar 20 km com a velocidade de 80 km/h, ele gasta 1/4 de hora, tempo que ele já gastou nos 10 km iniciais. Portanto, não é possível estabelece uma velocidade média nestas circunstâncias.

Gabarito: C

3.

São dados um navio N e um porto P; o navio movendo-se sobre a reta PN com velocidade v_N. Do porto emite-se um sinal sonoro breve simultaneamente na água e no ar; ele se propaga com velocidades v_1 e v_2 através da água e do ar, respectivamente. No navio, os sons incidentes através da água e do ar são recebidos em instantes separados por um intervalo de tempo Δt. A distância D que separa o navio do porto, no instante em que é recebido o sinal transmitido pela água, vale:

a) $D = \frac{v_1 v_2}{v_1 - v_2} . \left(1 + \frac{v_N}{v_2}\right) \Delta t$

b) $D = \frac{v_1 v_2}{v_1 + v_2} . \left(1 - \frac{v_N}{v_2}\right) \Delta t$

c) $D = \frac{v_1 v_2}{v_1 - v_2} . \left(1 - \frac{v_N}{v_2}\right) \Delta t$

d) $D = \frac{v_1 v_2}{v_1 - v_2} . \left(1 - \frac{v_N}{v_1}\right) \Delta t$

e) $D = \frac{v_1 v_2}{v_1 - v_2} . \left(1 + \frac{v_2}{v_N}\right) \Delta t$



Comentários:

Vamos fazer um desenho esquemático do nosso problema.



Devido ao fato do som se propagar com uma velocidade maior na água, o som chega primeiro na água, o navio ainda desloca até o som chegar pelo ar. Então, temos que:

$$\Delta t_{agua} = \frac{D}{v_1}$$

Tempo para o som chegar no navio pelo ar:

$$\Delta t_{ar} = \frac{D + \Delta d}{v_2}$$

Diferença dos tempos desejada:

$$\Delta t = \Delta t_{ar} - \Delta t_{agua}$$

Deslocamento do navio:

$$\Delta d = v_N . \Delta t$$

Assim, combinando as equações, podemos dizer que:

$$\Delta t = \frac{D}{v_2} + \frac{v_N}{v_2} . \Delta t - \frac{D}{v_1} \Rightarrow \boxed{D = \frac{v_1 v_2}{v_1 - v_2}\left(1 - \frac{v_N}{v_2}\right)\Delta t}$$

Gabarito: C

4.

São dadas duas localidades A e B interligadas por rodovia sensivelmente reta; a distância entre as duas cidades é D. O transporte de passageiros de uma localidade à outra pode ser feito por automóvel (velocidade média v_1) ou por avião (velocidade média v_2 desconhecida). Junto à rodovia há, entre A e B, uma localidade C à distância X (incógnita) de A. Um automóvel e um avião partem simultaneamente de A com destino a B. No mesmo instante em que o automóvel passa por C, o avião atinge B. Mais tarde, ambos os móveis partem simultaneamente de B com destino a A. O avião atinge A com antecedência "K" em relação ao instante em que o carro passa por C. Os valores de v_2 e X valem respectivamente:

a) $\frac{Dv_1}{D-kv_1}$ e $\frac{D-kv_1}{2}$

b) $\frac{Dv_1}{D-2kv_1}$ e $\frac{D-kv_1}{2}$

c) $\frac{2Dv_1}{D-kv_1}$ e $\frac{D-kv_1}{2}$

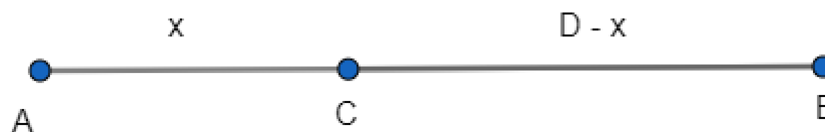
d) $\frac{Dv_1}{2D+kv_1}$ e $\frac{D+kv_1}{2}$

e) $\frac{4Dv_1}{D-kv_1}$ $e\ D - 2kv_1$

Comentários:



Como de costume, vamos esquematizar nosso problema:



Na primeira parte do problema, os dois estão indo em direção a B. Dessa forma, escrevemos que:

$$\Delta t_{carro} = \frac{x}{v_1} = \Delta t_{aviao} = \frac{D}{v_2}$$

Na segunda parte, os dois estão indo em direção a A. O avião (mais veloz) chega ao ponto A com k de antecedência com que o carro chega ao ponto C. Podemos equacionar da seguinte forma:

$$\Delta t_{aviao} + k = \Delta t_{carro}$$

$$\frac{D - x}{v_1} = k + \frac{x}{v_1}$$

$$x = \frac{D - kv_1}{2}$$

Logo, podemos encontrar o valor da velocidade do avião:

$$\frac{x}{v_1} = \frac{D}{v_2} \Rightarrow \boxed{v_2 = \frac{2Dv_1}{D - kv_1}}$$

Gabarito: C

---

5. (ITA)

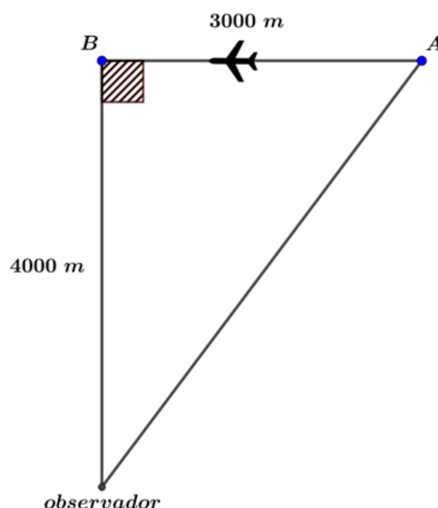
Um avião voando horizontalmente a 4000 m de altura numa trajetória retilínea com velocidade constante passou por um ponto A e depois por um ponto B situado a 3000 m do primeiro. Um observador no solo, parado no ponto verticalmente abaixo de B, começou a ouvir o som do avião, emitido em A, 4,00 segundos antes de ouvir o som proveniente de B. Se a velocidade do som no ar era de 320 m/s, qual era velocidade do avião?

a) 960 m/s b) 750 m/s c) 390 m/s d) 421 m/s e) 292 m/s

Comentários:

Trata-se de um problema que exige uma interpretação visual do problema:





Pela observação do triângulo, notamos se tratar do pitagórico, cujas dimensões são 3, 4 e 5, multiplicado por 1000. Isso nos permite concluir que a distância do observador ao ponto A vale $5000\ m$.

Podemos isolar o tempo na relação da velocidade para o MRU para determinarmos o tempo para o som ir do ponto A ao observador:

$$\Delta t = \frac{\Delta S}{v_{som}}$$

Substituindo-se os valores fornecidos:

$$\Delta t_{A \rightarrow observador} = \frac{5000}{320} = \frac{125}{8}\ s$$

De maneira análoga, para o som ir do ponto B até o observador, temos:

$$\Delta t_{B \rightarrow observador} = \frac{4000}{320} = \frac{100}{8}\ s$$

Como o som vem do ponto A $4\ segundos$ antes de começar a vir do ponto B, temos que o tempo para o avião percorrer a distância de A até B é:

$$\Delta t_{B \rightarrow observador} + \Delta t_{avião\ A \rightarrow B} = \Delta t_{A \rightarrow observador} + \Delta t_{percepção\ do\ som}$$

$$\frac{100}{8} + \Delta t_{avião\ A \rightarrow B} = \frac{125}{8} + 4$$

$$\Delta t_{avião\ A \rightarrow B} = \frac{125}{8} - \frac{100}{8} + 4 = \frac{57}{8}\ s$$

Por fim, a velocidade do avião no trecho AB pode ser encontrada por:

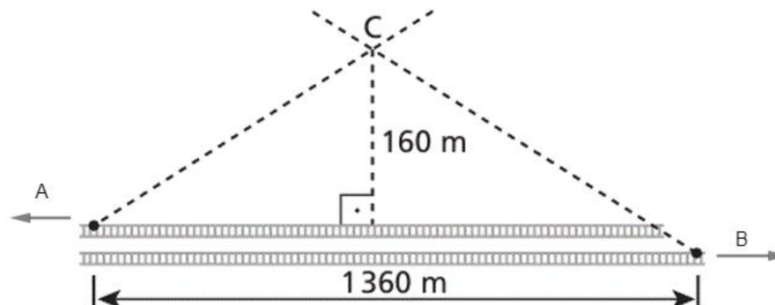
$$v_{avião} = \frac{\Delta s_{A \rightarrow B}}{\Delta t_{avião\ A \rightarrow B}} = \frac{3000}{\frac{57}{8}} = 421{,}05\ m/s$$

Gabarito: D

6. (ITA-1991)



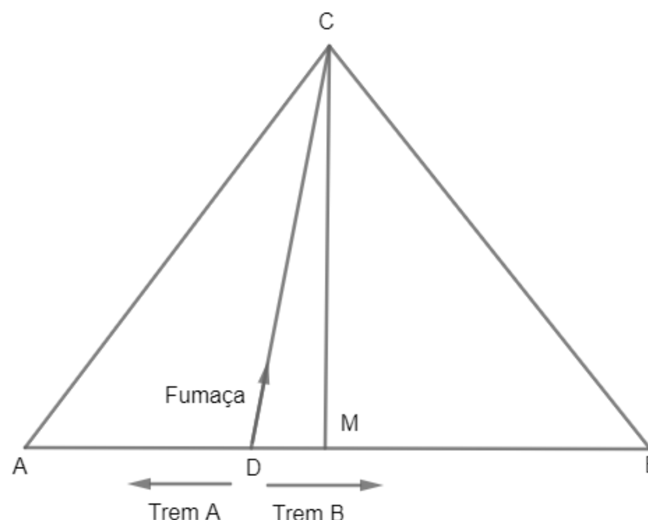
A figura representa uma vista aérea de um trecho retilíneo de ferrovia. Duas locomotivas a vapor, A e B, deslocam-se em sentidos contrários com velocidades constantes de $50,4\ km/h$ e $72\ km/h$, respectivamente. Uma vez que AC corresponde ao rastro da fumaça do trem A, BC ao rastro da fumaça do trem B e que $AC = BC$, determine a velocidade do vento. Despreze a distância entre os trilhos de A e B.



a) 5,00 m/s
b) 4,00 m/s
c) 17,5 m/s
d) 18,0 m/s
e) 14,4 m/s

Comentários:

Inicialmente, devemos voltar no tempo para o instante em que os trens se encontram. A figura abaixo ilustra o problema:



Notamos que o trem B é mais veloz que o trem A e, por isso, imaginamos o ponto de encontro antes do ponto médio (M) de AB. Dessa forma, DA é a distância percorrida pelo trem A e DB a distância percorrida pelo trem B. Assim, temos que:

$$AB + BD = 1360 \Rightarrow v_A.t + v_B t = 1360 \Rightarrow \frac{50,4}{3,6}.t + \frac{72}{3,6}.t = 1360 \Rightarrow t = 40\ s$$

Então, o trem a deslocou: $DA = \frac{50,4}{3,6}.40 = 560\ m$. Pela geometria do problema, temos que: $AM - AD = DM \Rightarrow DM = \frac{1360}{2} - \frac{50,4}{3.6}.40 = 120\ m$.

Dessa forma, pelo teorema de Pitágoras no triângulo MDC, encontramos a distância DC.

$$DC^2 = MC^2 + DM^2 \Rightarrow DC^2 = 120^2 + 160^2 = 200^2 \Rightarrow DC = 200\ m$$

Logo, a velocidade do vento será dada por:

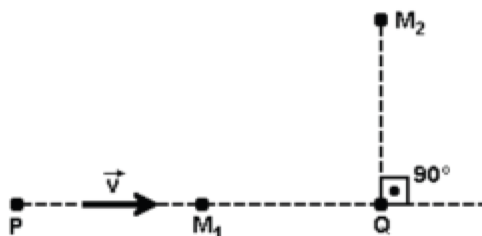
$$v_{vento} = \frac{DC}{\Delta t} = \frac{200}{40} = 5{,}00\ m/s$$

Gabarito: A

---

7. (ITA-2007)

Considere que num tiro de revolver, a bala percorre trajetória retilínea com velocidade V constante, desde o ponto inicial P até o alvo Q. Mostrados na figura abaixo, o aparelho M_1 registra simultaneamente o sinal sonoro do disparo e o do impacto da bala no alvo, o mesmo ocorrendo com o aparelho M_2. Sendo V_s a velocidade do som no ar, então a razão entre as respectivas distâncias dos aparelhos M_1 e M_2 em relação ao alvo Q é:



a) $\frac{V_S(V-V_S)}{V_S^2-V^2}$ b) $\frac{V_S(V_S-V)}{V^2-V_S^2}$ c) $\frac{V(V-V_S)}{V_S^2-V^2}$

d) $\frac{V_S(V+V_S)}{V^2-V_S^2}$ e) $\frac{V_S(V-V_S)}{V^2+V_S^2}$

Comentários:

Inicialmente, calculamos o intervalo de tempo que a bala leva para chegar até o alvo em Q.

$$\Delta t_{bala \to alvo} = \frac{\overline{PQ}}{V}$$

Agora, vamos calcular o intervalo de tempo de o som do disparo ir de P até M_1:

$$\Delta t_{som \to M_1} = \frac{\overline{PM_1}}{V_s}$$

Intervalo de tempo para o som do chegar em M_1 após o impacto em Q:

$$\Delta t_{som\ Q \to M_1} = \frac{\overline{QM_1}}{V_s}$$

Do enunciado, o intervalo de tempo de o som ir de P até M_1 é igual ao ao intervalo de tempo de a bala chegar ao alvo mais o intervalo de tempo do som do impacto chegar ao M_1, isto é:

$$\Delta t_{som \to M_1} = \Delta t_{bala \to alvo} + \Delta t_{som\ Q \to M_1}$$

$$\frac{\overline{PM_1}}{V_s} = \frac{\overline{PQ}}{V} + \frac{\overline{QM_1}}{V_s} \Rightarrow \frac{\overline{PM_1}}{V_s} = \frac{\overline{PM_1} + \overline{QM_1}}{V} + \frac{\overline{QM_1}}{V_s} \Rightarrow \frac{\overline{PM_1}}{\overline{QM_1}} = \frac{V + V_s}{V - V_s} \quad (1)$$

Para o segundo sensor, M_2, o tempo para o som do disparo chegar em M_2será:

$$\Delta t_{som\ P\rightarrow M_2} = \frac{\overline{PM_2}}{V_s}$$

Tempo para o som do impacto no alvo chegar em M_2:

$$\Delta t_{som\ Q\rightarrow M_2} = \frac{\overline{QM_2}}{V_s}$$

Analogamente ao primeiro sensor, temos que:

$$\Delta t_{som\ P\rightarrow M_2} = \Delta t_{bala\rightarrow alvo} + \Delta t_{som\ Q\rightarrow M_2}$$

$$\frac{\overline{PM_2}}{V_s} = \frac{\overline{PQ}}{V} + \frac{\overline{QM_2}}{V_s} \Rightarrow \overline{PM_2} = \frac{V_s}{V}.\overline{PQ} + \overline{QM_2}$$

Da geometria do problema, temos que: $(\overline{PM_2})^2 = (\overline{PQ})^2 + (\overline{QM_2})^2$

Substituindo o valor de $\overline{PM_2}$ na relação geométrica, vem:

$$\left(\frac{V_s}{V}\overline{PQ} + \overline{QM_2}\right)^2 = (\overline{PQ})^2 + (\overline{QM_2})^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{V_s}{V}\overline{PQ} + \overline{QM_2}\right)^2 - (\overline{QM_2})^2 = (\overline{PQ})^2$$

$$\Rightarrow \left[\frac{V_s}{V}\overline{PQ} + \overline{QM_2} - \overline{QM_2}\right]\left[\frac{V_s}{V}\overline{PQ} + \overline{QM_2} + \overline{QM_2}\right] = (\overline{PQ})^2$$

$$\Rightarrow \left[\frac{V_s}{V}.\overline{PQ}\right]\left[\frac{V_s}{V}\overline{PQ} + 2\overline{QM_2}\right] = (\overline{PQ})^2$$

$$\Rightarrow \frac{2V_s}{V}\overline{QM_2} = \overline{PQ}\left(1 - \frac{V_s^2}{V^2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{2V_s}{V}\overline{QM_2} = (\overline{PM_1} + \overline{QM_1})\left(1 - \frac{V_s^2}{V^2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{2V_s}{V}\overline{QM_2} = \left(\frac{\overline{QM_1}(V + V_s)}{V - V_s} + \overline{QM_1}\right)\left(1 - \frac{V_s^2}{V^2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{2V_s}{V}\overline{QM_2} = \overline{QM_1}\left(\frac{V + V_s}{V - V_s} + 1\right)\left(1 - \frac{V_s^2}{V^2}\right)$$

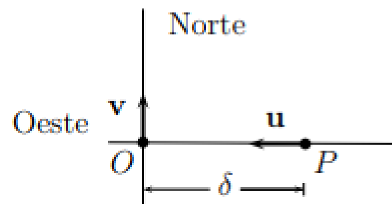
$$\therefore \boxed{\frac{\overline{QM_1}}{\overline{QM_2}} = \frac{V_s(V - V_s)}{V^2 - V_s^2}}$$

Gabarito: A

---

8. (ITA - 2013)

Ao passar pelo ponto O, um helicóptero segue na direção norte com velocidade v constante. Nesse momento, um avião passa pelo ponto P, a uma distância δ de O, e voa para o oeste, em direção a O, com velocidade u também constante, conforme mostra a figura. Considerando t o instante em que a distância d entre o helicóptero e o avião for mínima, assinale a alternativa correta.



a) A distância percorrida pelo helicóptero no instante em que o avião alcança o ponto O é $\frac{\delta u}{v}$.

b) A distância do helicóptero ao ponto O no instante t é igual a $\frac{\delta v^2}{u^2+v^2}$.

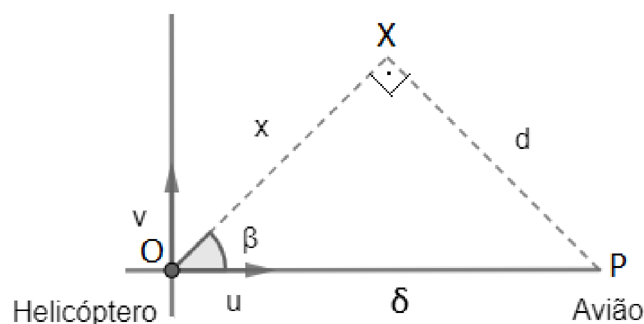
c) A distância do avião ao ponto O no instante t é igual a $\frac{\delta v^2}{v^2+u^2}$.

d) O instante t é igual a $\frac{\delta v}{v^2+u^2}$.

e) A distância d é igual a $\frac{\delta u}{\sqrt{v^2+u^2}}$.

Comentários:

Vamos adotar o referencial no avião, dessa forma podemos escrever as seguintes velocidades para o problema:



Notamos que ao adotar o avião como referencial, passamos a ver o helicóptero andar na direção de x, com velocidade u no sentido de O para P. A trajetória do helicóptero neste referencial será dada pela reta OX. No momento em que a distância é mínima, de acordo com a geometria plana, podemos dizer que $OX \perp PX$. Com isso, podemos dizer que:

$$cos\beta = \frac{x}{\delta}$$

Ao somar os vetores $\vec{u}\ e\ \vec{v}$, temos que: $\cos\beta = \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}$. Portanto:

$$\boxed{x = \frac{\delta u}{\sqrt{u^2+v^2}}}$$

No momento em que a distância é mínima, é dado por:



$$t = \frac{x}{\sqrt{u^2 + v^2}} = \frac{\delta u}{u^2 + v^2}$$

Para calcular a distância do avião ao ponto O no instante t, basta voltarmos ao referencial inicial da questão e diz que:

$$d_{AO} = \delta - u.t \Rightarrow \boxed{d_{AO} = \frac{\delta v^2}{v^2 + u^2}}$$

Portanto, a alternativa correta é a letra c). A alternativa a) está errada, pois, a distância percorrida pelo helicóptero é:

$$y = v.\Delta t_{aviao} = v.\frac{\delta}{u}$$

Gabarito: C

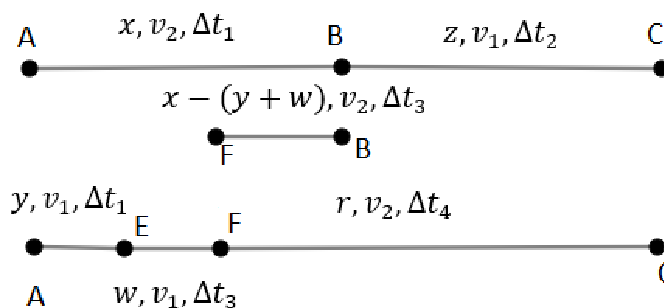
---

9. (Saraeva/ITA - 1988)

Três turistas, que possuem bicicleta, devem chegar ao centro turístico o menor espaço de tempo) o tempo conta-se até que o último turista chegue ao centro). A bicicleta pode transportar duas pessoas e por isso o terceiro turista deve ir a pé. Um ciclista leva o segundo turista até um determinado ponto do caminho, de onde este continua a andar a pé e o ciclista regressa para transportar o terceiro. Encontre a velocidade média dos turistas, sendo a velocidade do que vai a pé $v_1 = 4\ km/h$ e a do ciclista $v_2 = 20\ km/h$.

Comentários:

Vamos fazer um desenho esquemático mostrando os deslocamentos dos turistas. Lembrando que eles chegaram juntos ao centro turístico. Enquanto o turista ciclista leva o segundo turista, o terceiro turista caminha a distância y. Após deixar do segundo turista, o turista ciclista volta para buscar o outro enquanto o terceiro turista ainda caminha



Diante disso, temos algumas condições do problema. Geometricamente, temos que: $x + z = y + w + r$ (1).. Diante disso, temos as seguintes equações:

$$\mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B}: \Delta t_1 = \frac{x}{v_2}$$

$$A \rightarrow E: \Delta t_1 = \frac{y}{v_1}$$

$$B \rightarrow C: \Delta t_2 = \frac{z}{v_1}$$

$$E \rightarrow F: \Delta t_3 = \frac{w}{v_1}$$

$$B \rightarrow F: \Delta t_3 = \frac{x-(y+w)}{v_2}$$

$$F \rightarrow C: \Delta t_4 = \frac{r}{v_2}$$

Nós queremos saber a velocidade média dos turistas, isto é, $v_m = \frac{x+z}{\Delta t_1+\Delta t_2}$. Para isso devemos manipular algebricamente as equações acima:

$$\frac{x}{v_2} = \frac{y}{v_1} \;\; (1)$$

$$\frac{w}{v_1} = \frac{x-(y+w)}{v_2} \;\; (2)$$

$$\Delta t_2 = \Delta t_3 + \Delta t_4 \Rightarrow \frac{w}{v_1} + \frac{r}{v_2} = \frac{z}{v_1} \;\; (3)$$

E geometricamente, temos que: $x + z = y + w + r$ (4). Isolando w em (2), temos que: $w = \frac{v_1(x-y)}{v_1+v_2}$. Substituindo em (3), vem:

$$r = \frac{v_2}{v_1}.z - \frac{v_2(x-y)}{v_1+v_2}$$

Substituindo r e w em (4), podemos escrever z em função de $(x-y)$:

$$z = \frac{(x-y)2v_2v_1}{(v_1+v_2)(v_2-v_1)}$$

Agora, vamos isolar y em (1) e substituir na expressão de z e deixar z em função de x:

$$y = \frac{v_1}{v_2}.x$$

$$z = \frac{2v_1}{v_1+v_2}.x$$

Assim, podemos calcular a velocidade média dos turistas:

$$v_m = \frac{x+z}{\Delta t_1 + \Delta t_2} = \frac{x + \frac{2v_1}{v_1+v_2}.x}{\frac{x}{v_2} + \frac{2v_1}{(v_1+v_2)v_2}.x} \Rightarrow \boxed{v_m = \frac{(3v_1+v_2)v_2}{v_1+3v_2}}$$

Para as velocidades dadas, temos que: $v_m = \frac{3x4+20}{4+3x20}.20 = \frac{32.20}{64} = 10\ km/h$. Voltaremos futuramente a resolver está questão com o auxílio de um gráfico.



Gabarito: $10\ km/h$

10. (Inédita - Prof. Toni Burgatto)

Duas cidades A e B são ligadas por um serviço de ônibus com um ônibus deixando cada cidade em T minutos. Um jovem ciclista com velocidade de 20 km/h na direção de A para B nota que um ônibus passa por ele a cada 18 minutos na direção de movimento dele e a cada 6 minutos na direção oposta. Se os ônibus se movem com velocidade constante, o período de T é igual a:

(A) 6 min
(B) 7,5 min
(C) 9 min
(D) 10 min
(E) 12 min

Comentários:

Vamos chamar de V a velocidade dos ônibus entre as cidades A e B. A velocidade do ciclista será representada por v.

Quando o ciclista está se movendo na direção do ônibus, temos:

$$v_{rel_1} = V - v = V - 20$$

Os ônibus passam a cada 18 min (18/60 h) na direção do ciclista, então a distância percorrida pelo buas é de:

$$d_{rel1} = (V - 20) \cdot \frac{18}{60}$$

Em Tminutos, a distância percorrida por um ônibus é de:

$$d_1 = V \cdot \frac{T}{60}$$

Ao parar o ciclista (fazer a velocidade relativa em relação ao ciclista é parar o ciclista e dizer que o ônibus vai com velocidade $V - 20$), então $d_{rel1} = d_1$. Portanto:

$$(V - 20) \cdot \frac{18}{60} = V \cdot \frac{T}{60}$$

$$(V - 20) \cdot 18 = V \cdot T \ (Eq. 1)$$

Por outro lado, quando o ciclista está indo na direção oposta aos ônibus, temos:

$$v_{rel} = V + v = V + 20$$

Portanto:

$$(V + 20) \cdot \frac{6}{60} = V \cdot \frac{T}{60}$$

$$V \cdot T = (V + 20) \cdot 6 \ (Eq. 2)$$

Logo, de 1 em 2, vem:

$$(V - 20) \cdot 18 = (V + 20) \cdot 6$$

$$3V - 60 = V + 20$$

$$V = 40\ km/h$$

Portanto:

$$(V - 20) \cdot 18 = V \cdot T$$

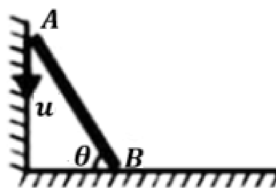
$$(40 - 20) \cdot 18 = 40 \cdot T$$

$$\boxed{T = 9\ min}$$

Gabarito: C

11. (Inédita - Prof. Toni Burgatto)

Uma barra rígida está apoiada sobre duas paredes. Sabe-se que a velocidade da extremidade A é igual a u e essa extremidade sempre se move na vertical com a parede. Se a barra se move com velocidade constante na direção vertical, então a velocidade da extremidade B é dada por:



(A) $u \cdot cotg(\theta)$

(B) $\frac{u}{sen(\theta)}$

(C) $\frac{u}{\cos(\theta)}$

(D) $u \cdot tg(\theta)$

(E) $u \cdot tg(2\theta)$

Comentários:

Pelo vínculo geométrico, pelo fato da barra ter a mesma velocidade de cada partícula ser a mesma (barra rígida), então a componente da velocidade na direção da barra é a mesma). Chamando de v a velocidade no ponto B, então:

$$v \cdot \cos(\theta) = u \cdot \cos(90° - \theta)$$

$$v = u \cdot \frac{sen(\theta)}{\cos(\theta)}$$

$$\boxed{v = u \cdot tg(\theta)}$$

Gabarito: D

18. Referências Bibliográficas

[1] Calçada, Caio Sérgio. Física Clássica. 1. ed. Saraiva Didáticos, 2012. 576p.

[2] Bukhovtsev, B.B. Krivtchenkov, V.D. Miakishev, G.Ya. Saraeva, I. M. Problemas Selecionados de Física Elementar. 1 ed. MIR, 1977.518p.

[3] Brito, Renato. Fundamentos de Mecânica. 2 ed. VestSeller, 2010. 496p.

[4] Departamento de Física do ITA. Algarismos significativos. Disponível em: <http://www.fis.ita.br/labfis45/erros/errostextos/erros1.htm>

[5] IM-UFRJ. Aula 8 Produto Escalar. Disponível em <http://www.im.ufrj.br/nuno/aula8.pdf>

[6] Camargo, Ivan de. Boulos, Paulo. Geometria analítica: Um tratamento vetorial. 3. Ed. Person Education, 2004, 560p.

19. Considerações Finais

Chegamos ao final da nossa primeira aula de introdução à Física e de introdução à Cinemática. Na próxima aula, começaremos a estudar os tipos de movimentos mais simples na cinemática e como abordar as questões dos concursos.

A aula 00 é de extrema importância para o andamento do curso, assim como os conceitos iniciais de cinemática são fundamentais para que possamos abortar outros tipos de movimento mais complexos.

Tente fazer todas as questões da lista sem olhar o gabarito. O caminho para passar na AFA é difícil, por isso é muito importante fazer as questões e não abandonar nenhuma dúvida.

Conte comigo nessa jornada. Quaisquer dúvidas, críticas ou sugestões entre em contato pelo fórum de dúvidas do Estratégia ou se preferir:



 @proftoniburgatto